

## Übungsblatt 6 Integralrechnung + Wdh.

## Aufgabe 6.1 Wiederholung (klausur-artige Aufgaben)

- a) Bestimmen Sie die Lösungen:  $\sqrt{2x + 12} - x = 2$
- b) Berechnen Sie annähernd  $\frac{1}{\sqrt{e}}$  (e ist die **Eulersche Zahl**) indem Sie die Funktion  $f(x) = e^x$  an der Stelle  $x_0 = 0$  in ein **Taylorpolynom 6. Grades** entwickeln! Welchen Wert müssen Sie für x in das Taylorpolynom einsetzen? Wie genau ist diese Annäherung? Schätzen Sie die Genauigkeit der Annäherung (den Fehler) mit der **Restgliedformel von Lagrange** ab! (Begründen Sie, warum C=1 die beste mögliche Abschätzung ist).

## Aufgabe 6.2 Integrale und Stammfunktionen

Bestimmen Sie die nachfolgenden bestimmten Integrale sowie ihre Stammfunktionen!

(a)  $\int_0^1 \sqrt{x} dx$

(b)  $\int_{-1}^1 x dx$

(c)  $\int_{-1}^1 x^2 dx$

- (d) Fällt Ihnen bei (b) und (c) etwas auf? Kann man das verallgemeinern? Verwenden Sie

diese Erkenntnis, um möglichst einfach  $\int_{-23}^{23} f(x) dx$  zu berechnen, wobei entweder  $f(x) = \sin(x)$  oder  $f(x) = \cos(x)$  gilt.

## Aufgabe 6.3 Substitutionsregel

(a)  $\int \cos(\pi - 2x) dx$

(b)  $\int_0^2 \sqrt[3]{\left(\frac{x}{4} - 2\right)^2} dx$

(c)  $\int x(x^2 + 3)^4 dx$

(d)  $\int_0^1 \sin(x) e^{\cos(x)} dx$

## Aufgabe 6.4 Partielle Integration

(a)  $\int x e^x dx$

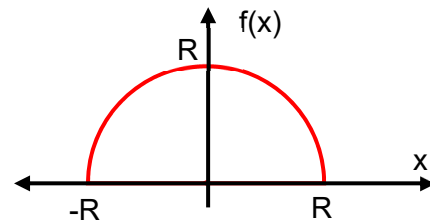
(b)  $\int \ln(x) dx$

(c)  $\int \frac{\ln(x)}{x^2} dx$

[Hinweis zu (b): Schreiben Sie  $\ln(x)$  als Produkt  $1 \cdot \ln(x)$ .]

**Aufgabe 6.5 Kugelvolumen**

- (a) Welche Funktion  $f(x)$  beschreibt den nebenstehend gezeichneten Halbkreis?
- (b) Berechnen Sie das Volumen einer Kugel mit Radius  $R$ , indem Sie den Halbkreis um die  $x$ -Achse rotieren lassen. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der Formelsammlung!

**Aufgabe 6.6 Uneigentliche Integrale**

Welche der folgenden uneigentlichen Integrale sind konvergent? Was ist im Falle der Konvergenz ihr Grenzwert?

(a)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x+1)^2 + 1}$

(b)  $\int_1^{\infty} \frac{(x+1)}{x^2} dx$

[Hinweis: Die Ableitung von  $\arctan(z)$  ist:  $\frac{1}{z^2+1}$ ]

(c)  $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$

(d)  $\int_0^{\infty} (3e^{-2x} - e^{-x}) dx$

**Aufgabe 6.7 Integrale (klausur-ähnlich)**

Berechnen Sie mit Hilfe einer geeigneten Integrationsmethode:

a.  $\int_0^{\pi/2} e^{\sin x} \cdot \cos x \, dx$

b.  $\int \left( \sin(x) - \frac{x}{x^2+1} + x^3 \right) dx$

c.  $\int_a^x (\sin(t))^5 \cos(t) dt$

**Aufgabe 6.8 Rotationskörper**

Gegeben ist  $f(x) = \frac{1}{2}x \cdot \sqrt{4-x}$

Die Fläche, die der Funktionsgraph zwischen seinen beiden Nullstellen mit der  $x$ -Achse einschließt, rotiere um die  $x$ -Achse. Berechnen Sie das Volumen des entstehenden Körpers.