

## Übungsblatt 8 Komplexe Zahlen + DGL

In den nachfolgenden Aufgaben bezeichnet  $i$  jeweils die imaginäre Einheit.

### Aufgabe 8.1 Rechnen mit komplexen Zahlen

Berechnen Sie:

- a)  $4i - 5 + i(1 - i)$
- b)  $|4 + 6i| - |4 - 6i|$
- c)  $\frac{3+2i}{3-2i}$
- d)  $\frac{i}{\cos(\frac{\pi}{3}) - i \sin(\frac{\pi}{3})}$

### Aufgabe 8.2 Darstellungsformen komplexer Zahlen

Ergänzen Sie die jeweils fehlenden Darstellungsformen

	kartesische Form	Polarform	
		trigonom. Form	Exponentialform
a)		$\cos(\frac{\pi}{2}) + i \sin(\frac{\pi}{2})$	
b)			$2e^{i\pi}$
c)	$-i$		
d)			$\sqrt{45}e^{i\varphi}$
e)	$4 - 12i$		

Bei d) sei  $\varphi = \arctan(-2) + \pi$

### Aufgabe 8.3

Man berechne Real- und Imaginärteil von

$$z = (1 + \sqrt{3} \cdot i)^5$$

### Aufgabe 8.4 Graphisches Rechnen mit komplexen Zahlen

Gegeben sind die beiden komplexen Zahlen:  $z_1 = 1 - 5i$  ;  $z_2 = 4 + 3i$  .

- a) Addieren und subtrahieren Sie die Zahlen graphisch in der Gaußschen Zahlenebene. Zeichnen Sie die konjugiert komplexe Zahl zu  $z_1$  ebenfalls ein.
- b) Man stelle  $z_1$  und  $z_2$  in Exponentialform dar. Bilden Sie nun  $z_1^2$ ,  $\sqrt[3]{z_1}$ ,  $z_1 \cdot z_2$  ebenfalls mit graphischen Methoden.

Bereiten Sie die Aufgaben für den 26.05.2020 so vor, dass Sie in der Lage sind, Ihre Lösungen vorzutragen.

### Aufgabe 8.5 Additionstheoreme

a) Leiten Sie die "normalen" Additionstheoreme

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

aus der Eulerschen Formel (Satz S 11-3) her.

b) Leiten Sie die Additionstheoreme

$$\cos(3\varphi) = \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi$$

$$\sin(3\varphi) = 3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi$$

aus dem Satz von Moivre (Satz S 11-5) her

### Aufgabe 8.6 Lösung algebraischer Gleichungen

Man bestimme für  $Z$  alle Lösungen  $Z_k \in \mathbf{C}$  in kartesischer Form.

Zeichnen Sie die  $Z_k \in \mathbf{C}$  in der komplexen Ebene!

a)  $z^6 - 64 = 0$

b)  $(2 + 2\sqrt{3} \cdot i)z = 8e^{i \cdot \pi}$

c)  $z^2 = i$

### Aufgabe 8.7

$\lambda$  sei eine beliebige reelle Zahl. Bestimmen Sie die zwei komplexen Lösungen der folgenden Gleichung mittels quadratischer Ergänzung:

$$z^2 - (\lambda - 2i)z - (1 + \lambda i) = 0$$

Ermitteln Sie Real- und Imaginärteile von  $Z_{1,2} \in \mathbf{C}$ . Stellen Sie beide Lösungen auch in der Exponentialform  $Z = r \cdot e^{i\varphi}$  dar.

### Aufgabe 8.8 DGL mit nur einem Ableitungsterm

Die Beschleunigung einer Kugel in einem Computerspiel sei gegeben durch die Differentialgleichung

$$s''(t) = 2t$$

- Interpretieren Sie die Differentialgleichung (Ordnung, explizit/implizit, homogen/inhomogen), jeweils mit einem Begründungssatz.
- Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung. Wie viele freie Parameter hat sie?
- Lösen Sie die Differentialgleichung für die Anfangsbedingungen:  
 $s(0) = 5, \quad s'(0) = 3$

Bereiten Sie die Aufgaben für den 26.05.2020 so vor, dass Sie in der Lage sind, Ihre Lösungen vorzutragen.

**Aufgabe 8.9 Anfangswertproblem**

Ermitteln Sie die Lösung des Anfangswertproblems (Ansatz:  $Ae^{\lambda t}$ ,  $\lambda \in \mathbf{C}$ )

$$x''(t) + 6x'(t) + 8.75x(t) = 0, \quad x'(0) = 8, \quad x(0) = 0$$

**Aufgabe 8.10 Lineare DGL**

(a) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der DGL (Ansatz:  $y(t)=e^{\lambda t}$ ,  $\lambda \in \mathbf{C}$ )

$$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = 0$$

(b) Ermitteln Sie die spezielle Lösung für  $y(0) = -1 - 2i$  und  $y'(0) = 5$ .

(c) Machen Sie die Probe, ob die spezielle Lösung die DGL löst.