

**Fachprüfung AI / TI / MI    Mathematik 1**  
**Prof. Dr. Wolfgang Konen, Dr. A. Schmitter – FH Köln, Institut für Informatik**  
**07.07.2014**

Name: \_\_\_\_\_

Vorname: \_\_\_\_\_

Matr.-Nr.: \_\_\_\_\_

Unterschrift: \_\_\_\_\_

**Klausurdauer: 60 min.**

**Hilfsmittel:** Formelsammlung Mathematik  
 Rezepte Mathe 1+2  
 nicht-grafikfähiger Taschenrechner

- Hinweise:**
1. Benutzen Sie keinen Bleistift und keinen roten Stift. Heftung nicht lösen. Keine losen Blätter erlaubt.
  2. Nebenrechnungen gehören in die Klausur - Schmierpapier ist nicht erlaubt.
  3. Ungültige oder falsche Lösungswege durchstreichen. Der Lösungsweg muß nachvollziehbar sein (nur Ergebnis reicht nicht!).
  4. Lesen Sie bitte zunächst die Aufgabenstellungen komplett durch und prüfen Sie auf Vollständigkeit und Verständlichkeit der Aufgaben!
  5. Tragen Sie bitte auf diesem Deckblatt Name, Vorname, Matr.-Nr. und Unterschrift ein!

Ich wünsche Ihnen viel Erfolg!

| Aufgaben                              | max. Punktzahl | erreichte Punktzahl |
|---------------------------------------|----------------|---------------------|
| 1 <b>Zahlsysteme, mod. Arithmetik</b> | <b>13</b>      |                     |
| 2 <b>Grenzwerte</b>                   | <b>12</b>      |                     |
| 3 <b>Taylor + Extremwerte</b>         | <b>13</b>      |                     |
| 4 <b>Lineare Algebra</b>              | <b>12</b>      |                     |
| 5                                     |                |                     |
| 6                                     |                |                     |
| 7                                     |                |                     |
| 8                                     |                |                     |
| 9                                     |                |                     |
| <b>Punktzahl Gesamt:</b>              | <b>50</b>      |                     |

***Aufgabe 1 Gleichungen, Zahlssystem und Modulare Arithmetik***

Bestimmen Sie die Lösung(en)!

a)  $\sqrt{5-x} + 3 - x = 0$

b)  $(3 \cdot 7 + 81^{1285} - 27 \cdot 16) \bmod 8$             und

$((21 \cdot 16)^{250} + 3 - 3 \cdot 15) \bmod 5$

c) Wie viele Stellen (vor dem Komma) hat  $9^{500}$  in der Binärdarstellung?

**Aufgabe 2    Grenzwert + Definitionsbereich**

Berechnen Sie jeweils den Grenzwert:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{10x^2 - 5x + 3}{\cos(x)} \right) \left( \frac{\sqrt{x+4} - 2}{2x} \right)$

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln(5x + 3)}{\exp(x)} \right)$

c) Geben Sie den Definitionsbereich D folgender Funktion an ( $x \in \mathbf{R}$ ):

$$f(x) = \sqrt{4 - \sqrt{25 - x^2}}$$

Notieren Sie dabei D in Intervallschreibweise, z.B.  $D = [a,b] \cup [c,d]$ .

***Aufgabe 3 Taylor / Extremwerte***

- a) Berechnen Sie  $\sin(36^\circ)$ , indem Sie das **Taylorpolynom 5. Grades** für  $f(x)=\sin(x)$  an der Stelle  $x=0$  nehmen und den Wert dann näherungsweise berechnen. Bestimmen Sie die Genauigkeit mit Hilfe der **Restgliedabschätzung von Lagrange**. Überlegen Sie zuallererst, ob es sinnvoll ist, mit dem Winkel  $36^\circ$  (Gradmaß) zu rechnen.
- b) Welcher oben offene Zylinder hat bei einer gegebenen Oberfläche von  $1 \text{ m}^2$  das **größte Volumen** ?

**Aufgabe 4 Lineare Algebra**

- a) Durch die folgenden Tabellen werde der Materialbedarf für einen zweistufigen Produktionsprozess beschrieben. Dabei werden aus 4 Rohstoffen über 3 Zwischenprodukte 2 Endprodukte hergestellt.

*Rohstoffbedarf für die Zwischenprodukte:    Zwischenproduktbedarf für Endprodukte:*

|    | Z1 | Z2 | Z3 |
|----|----|----|----|
| R1 | 5  | 8  | 0  |
| R2 | 1  | 2  | 3  |
| R3 | 4  | 6  | 2  |
| R4 | 7  | 3  | 2  |

|    | E1 | E2 |
|----|----|----|
| Z1 | 5  | 0  |
| Z2 | 0  | 7  |
| Z3 | 5  | 10 |

- Zeichnen Sie zur Darstellung der Verflechtung einen Gozintographen für diesen Produktionsprozess
- Berechnen Sie mit Hilfe der Matrizenrechnung den Rohstoffbedarf für eine Produktion von 500 Einheiten E1 und 125 Einheiten E2.

***Aufgabe 4 (Forts.)***

b) Um die Stadt **A**, die an einer geraden Straße liegt, die durch die Punkte **P(0;8)** und **Q(8;0)** geht, soll eine Umgehungsstraße gebaut werden, deren Verlauf durch eine **ganzrationale Funktion 4. Grades** beschrieben wird. Die Umgehungsstraße soll in P und Q tangential in die alte gerade Straße münden (d.h. die Steigungen von alter und neuer Straße stimmen in P und Q überein). Zusätzlich soll die Umgehungsstraße durch den Punkt **R(4;2)** gehen. Machen Sie sich zunächst eine aussagekräftige Skizze und stellen dann die erweiterte Koeffizientenmatrix für die Berechnung der Funktion mit dem Gauß'schen Lösungsverfahren auf. Den Lösungsverfahren selber müssen Sie **nicht** durchführen!

**Fachprüfung AI / TI / MI    Mathematik 2**  
**Prof. Dr. Wolfgang Konen, Dr. A. Schmitter – FH Köln, Institut für Informatik**  
**07.07.2014**

Name: \_\_\_\_\_

Vorname: \_\_\_\_\_

Matr.-Nr.: \_\_\_\_\_

Unterschrift: \_\_\_\_\_

**Klausurdauer: 60 min.**

**Hilfsmittel:** Formelsammlung Mathematik  
 Rezepte Mathe 1+2  
 nicht-grafikfähiger Taschenrechner

- Hinweise:**
1. Benutzen Sie keinen Bleistift und keinen roten Stift. Heftung nicht lösen. Keine losen Blätter erlaubt.
  2. Nebenrechnungen gehören in die Klausur - Schmierpapier ist nicht erlaubt.
  3. Ungültige oder falsche Lösungswege durchstreichen. Der Lösungsweg muß nachvollziehbar sein (nur Ergebnis reicht nicht!).
  4. Lesen Sie bitte zunächst die Aufgabenstellungen komplett durch und prüfen Sie auf Vollständigkeit und Verständlichkeit der Aufgaben!
  5. Tragen Sie bitte auf diesem Deckblatt Name, Vorname, Matr.-Nr. und Unterschrift ein!

Ich wünsche Ihnen viel Erfolg!

| Aufgaben                 | max. Punktzahl                      | erreichte Punktzahl |
|--------------------------|-------------------------------------|---------------------|
| 1                        |                                     |                     |
| 2                        |                                     |                     |
| 3                        |                                     |                     |
| 4                        |                                     |                     |
| 5                        | <b>Mehrdim. Analysis + Integral</b> | <b>14</b>           |
| 6                        | <b>Graphen</b>                      | <b>11</b>           |
| 7                        | <b>Statistik</b>                    | <b>13</b>           |
| 8                        | <b>Komplexe Zahlen + DGL</b>        | <b>12</b>           |
| 9                        |                                     |                     |
| <b>Punktzahl Gesamt:</b> | <b>50</b>                           |                     |

***Aufgabe 5 Mehrdimensionale Analysis + Integral***

a) Berechnen Sie mit der **Methode von Lagrange** die Kandidaten für die relativen Extremwerte folgender Funktion:

$$f(u, v, w) = 4u + 3v + w \quad \text{unter den Nebenbedingungen}$$
$$uv = 6 \quad \text{und} \quad vw = 24$$

b) Berechnen Sie mit Hilfe einer geeigneten Integrationsmethode:

$$\int_a^x (\sin(t))^5 \cdot \cos(t) \, dt$$

***Aufgabe 6    Graphen***

a) Gegeben sind folgende Codes:

- 1) b=01   e=0001   h=001   a=10   r=11
- 2) b=01   e=0100   h= 001   a=10   r=11

Einer davon ist ein Präfixcode. Welcher? Erläutern Sie Ihre Entscheidung und entschlüsseln Sie dann folgende Bitfolge:

110011001101101000111

b) Definieren Sie folgende Begriffe aus der Graphentheorie: Knotengrad, schlichter Graph, zusammenhängender Graph.

**Fachprüfung AI / TI / MI    Mathematik 2**  
**Prof. Dr. Wolfgang Konen, Dr. A. Schmitter – FH Köln, Institut für Informatik**  
**07.07.2014**

**Aufgabe 6 (Forts.)**

c) Gegeben ist die **Adjazenzmatrix** eines ungerichteten Graphen mit 7 Knoten:

|                | X <sub>1</sub> | X <sub>2</sub> | X <sub>3</sub> | X <sub>4</sub> | X <sub>5</sub> | X <sub>6</sub> | X <sub>7</sub> |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| X <sub>1</sub> | 2              | 1              | 1              | 0              | 0              | 1              | 0              |
| X <sub>2</sub> | 1              | 0              | 1              | 1              | 0              | 0              | 1              |
| X <sub>3</sub> | 1              | 1              | 0              | 1              | 1              | 0              | 0              |
| X <sub>4</sub> | 0              | 1              | 1              | 0              | 1              | 0              | 0              |
| X <sub>5</sub> | 0              | 0              | 1              | 1              | 0              | 1              | 0              |
| X <sub>6</sub> | 1              | 0              | 0              | 0              | 1              | 0              | 1              |
| X <sub>7</sub> | 0              | 1              | 0              | 0              | 0              | 1              | 0              |

Zeichnen Sie den dazugehörenden Graphen möglichst kreuzungsfrei.  
Wie können Sie die Knotengrade aus der Matrix ablesen?

**Fachprüfung AI / TI / MI    Mathematik 2**  
**Prof. Dr. Wolfgang Konen, Dr. A. Schmitter – FH Köln, Institut für Informatik**  
**07.07.2014**

**Aufgabe 7 Statistik**

- a) Gegeben sind die Ergebnisse (bereits der Größe nach sortiert) von 36 Messungen der Mensabesucher am Campus GM in der Mittagsstunde. Berechnen Sie alle für einen **Boxplot** notwendigen Größen und zeichnen Sie anschließend diesen.

|    |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 60 | 65  | 65  | 68  | 69  | 72  | 74  | 74  | 75  | 77  | 78  | 82  |
| 83 | 83  | 85  | 87  | 88  | 89  | 90  | 90  | 91  | 94  | 94  | 95  |
| 97 | 100 | 102 | 107 | 108 | 110 | 112 | 114 | 115 | 122 | 124 | 125 |

- b) Wie viele Wörter über dem Alphabet  $\{a, b, c, d, e\}$  mit 10 Buchstaben gibt es, die genau 8 b's enthalten? Wie viele Wörter enthalten mehr als 7 b's?
- c) Ein Medikament heile einen Patienten mit einer Wahrscheinlichkeit von 80%. Das Medikament werde 1000 Personen verabreicht. Unter der Annahme, dass es sich um ein Bernoulli-Experiment handelt, berechne man die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 790 Personen dabei geheilt werden. Verwenden Sie für Ihre Rechnung die Aussage des Grenzwertsatzes von **De Moivre-Laplace**. Die Werte der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung finden Sie im Anhang.

***Aufgabe 8 Komplexe Zahlen + DGL***

Lösen Sie im Bereich der komplexen Zahlen ( $i = \text{imaginäre Einheit}$ )

- a) Lösen Sie folgende Gleichung nach  $z$  auf:  $z^8 = 256i$   
(geben Sie hier das Ergebnis **nur in** der Exponentialform an)

Gegeben sei die Differentialgleichung (DGL):  $y''(x) + 4y(x) = 8$

- b) Interpretieren Sie die Differentialgleichung (Ordnung, explizit/implizit, linear, homogen/inhomogen, mit/ohne konstante Koeffizienten), jeweils mit einem Begründungssatz.  
c) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen DGL.  
d) Ermitteln Sie mit geeignetem Ansatz eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL. Wie lautet nun die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL?

**Verteilungsfunktion  $\Phi(x)$  der  $N(0,1)$ -Verteilung,  $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$**

| x   | ,00     | ,01     | ,02     | ,03     | ,04     | ,05     | ,06     | ,07     | ,08     | ,09     |
|-----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0,0 | 0,50000 | 0,50399 | 0,50798 | 0,51197 | 0,51595 | 0,51994 | 0,52392 | 0,52790 | 0,53188 | 0,53586 |
| 0,1 | 0,53983 | 0,54380 | 0,54776 | 0,55172 | 0,55567 | 0,55962 | 0,56356 | 0,56750 | 0,57142 | 0,57534 |
| 0,2 | 0,57926 | 0,58317 | 0,58706 | 0,59095 | 0,59483 | 0,59871 | 0,60257 | 0,60642 | 0,61026 | 0,61409 |
| 0,3 | 0,61791 | 0,62172 | 0,62552 | 0,62930 | 0,63307 | 0,63683 | 0,64058 | 0,64431 | 0,64803 | 0,65173 |
| 0,4 | 0,65542 | 0,65910 | 0,66276 | 0,66640 | 0,67003 | 0,67365 | 0,67724 | 0,68082 | 0,68439 | 0,68795 |
| 0,5 | 0,69146 | 0,69497 | 0,69847 | 0,70194 | 0,70540 | 0,70884 | 0,71226 | 0,71566 | 0,71904 | 0,72240 |
| 0,6 | 0,72575 | 0,72907 | 0,73237 | 0,73565 | 0,73891 | 0,74215 | 0,74537 | 0,74857 | 0,75175 | 0,75490 |
| 0,7 | 0,75804 | 0,76115 | 0,76424 | 0,76730 | 0,77035 | 0,77337 | 0,77637 | 0,77935 | 0,78230 | 0,78524 |
| 0,8 | 0,78814 | 0,79103 | 0,79389 | 0,79673 | 0,79955 | 0,80234 | 0,80511 | 0,80785 | 0,81057 | 0,81327 |
| 0,9 | 0,81594 | 0,81859 | 0,82121 | 0,82381 | 0,82639 | 0,82894 | 0,83147 | 0,83398 | 0,83646 | 0,83891 |
| 1,0 | 0,84134 | 0,84375 | 0,84614 | 0,84850 | 0,85083 | 0,85314 | 0,85543 | 0,85769 | 0,85993 | 0,86214 |
| 1,1 | 0,86433 | 0,86650 | 0,86864 | 0,87076 | 0,87286 | 0,87493 | 0,87698 | 0,87900 | 0,88100 | 0,88298 |
| 1,2 | 0,88493 | 0,88686 | 0,88877 | 0,89065 | 0,89251 | 0,89435 | 0,89617 | 0,89796 | 0,89973 | 0,90148 |
| 1,3 | 0,90320 | 0,90490 | 0,90658 | 0,90824 | 0,90988 | 0,91149 | 0,91309 | 0,91466 | 0,91621 | 0,91774 |
| 1,4 | 0,91924 | 0,92073 | 0,92220 | 0,92364 | 0,92507 | 0,92647 | 0,92786 | 0,92922 | 0,93056 | 0,93188 |
| 1,5 | 0,93319 | 0,93448 | 0,93574 | 0,93699 | 0,93822 | 0,93943 | 0,94062 | 0,94179 | 0,94295 | 0,94408 |
| 1,6 | 0,94520 | 0,94630 | 0,94738 | 0,94840 | 0,94950 | 0,95053 | 0,95154 | 0,95254 | 0,95352 | 0,95449 |
| 1,7 | 0,95543 | 0,95637 | 0,95728 | 0,95818 | 0,95907 | 0,95994 | 0,96080 | 0,96164 | 0,96246 | 0,96327 |
| 1,8 | 0,96407 | 0,96485 | 0,96562 | 0,96638 | 0,96712 | 0,96784 | 0,96856 | 0,96926 | 0,96995 | 0,97062 |
| 1,9 | 0,97128 | 0,97193 | 0,97257 | 0,97320 | 0,97381 | 0,97441 | 0,97500 | 0,97558 | 0,97615 | 0,97670 |
| 2,0 | 0,97725 | 0,97778 | 0,97831 | 0,97882 | 0,97932 | 0,97982 | 0,98030 | 0,98077 | 0,98124 | 0,98169 |
| 2,1 | 0,98214 | 0,98257 | 0,98300 | 0,98341 | 0,98382 | 0,98422 | 0,98461 | 0,98500 | 0,98537 | 0,98574 |
| 2,2 | 0,98610 | 0,98645 | 0,98679 | 0,98713 | 0,98745 | 0,98778 | 0,98809 | 0,98840 | 0,98870 | 0,98899 |
| 2,3 | 0,98928 | 0,98956 | 0,98983 | 0,99010 | 0,99036 | 0,99061 | 0,99086 | 0,99111 | 0,99134 | 0,99158 |
| 2,4 | 0,99180 | 0,99202 | 0,99224 | 0,99245 | 0,99266 | 0,99286 | 0,99305 | 0,99324 | 0,99343 | 0,99361 |
| 2,5 | 0,99379 | 0,99396 | 0,99413 | 0,99430 | 0,99446 | 0,99461 | 0,99477 | 0,99492 | 0,99506 | 0,99520 |
| 2,6 | 0,99534 | 0,99547 | 0,99560 | 0,99573 | 0,99586 | 0,99598 | 0,99609 | 0,99621 | 0,99632 | 0,99643 |
| 2,7 | 0,99653 | 0,99664 | 0,99674 | 0,99683 | 0,99693 | 0,99702 | 0,99711 | 0,99720 | 0,99728 | 0,99736 |
| 2,8 | 0,99744 | 0,99752 | 0,99760 | 0,99767 | 0,99774 | 0,99781 | 0,99788 | 0,99795 | 0,99801 | 0,99807 |
| 2,9 | 0,99813 | 0,99819 | 0,99825 | 0,99831 | 0,99836 | 0,99841 | 0,99846 | 0,99851 | 0,99856 | 0,99861 |
| 3,0 | 0,99865 | 0,99869 | 0,99874 | 0,99878 | 0,99882 | 0,99886 | 0,99889 | 0,99893 | 0,99896 | 0,99900 |
| 3,1 | 0,99903 | 3,2     | 0,99931 | 3,3     | 0,99952 | 3,4     | 0,99966 | 3,5     | 0,99977 |         |
| 3,6 | 0,99984 | 3,7     | 0,99989 | 3,8     | 0,99993 | 3,9     | 0,99995 | 4,0     | 0,99997 |         |