Probeklausur SS 2017 – Lösungen

Aufgabe 1

a) $\int_0^1 \sin x \cdot e^{\cos x}\, dx$

bestimmtes Integral

Aufsuchen der Stammfunktion durch:
Integration durch Substitution

$z = \cos x \qquad \frac{dz}{dx} = -\sin x \qquad dz = -\sin x\, dx$

$-\int e^z\, dz \quad = -e^z$

Einsetzen der Integrationsgrenzen (substituiert)

$\left[-e^z\right]_{\cos 0}^{\cos 1} = \left(-e^{\cos 1} - (-e^{\cos 0})\right)$

$= -e^{\cos 1} + e^{\cos 0}$

$= -e^{\cos 1} + e^1$

$= e - e^{\cos 1}$

$= e - e^{0.5403}$

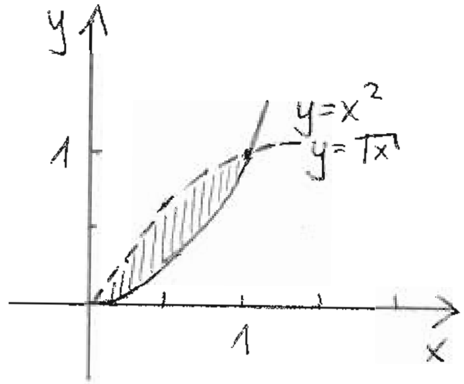
$\approx 2.718 - 1.716$

$\underline{\underline{\approx 1.002}}$

Probeklausur SS2017 - Lösungen

Aufgabe 1

b)



Skizze!

Schnittpunkte der beiden Kurven bei (0,0) und (1,1)

Ansatz: $\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,dx = \int_0^1 (x^{\frac{1}{2}} - x^2)\,dx$

$$= \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3} 1^{\frac{3}{2}} - \frac{1^3}{3} - \left(\frac{2}{3} 0^{\frac{3}{2}} - \frac{0^3}{3} \right)$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}} \text{ Flächeneinheiten (FE)}$$

Probeklausur SS2017 - Lösungen

Aufgabe 2

a) Minimum : 102

Maximum : 153

x_i $i = 1, \dots 40$ Stichprobenwerte

Median : $\frac{x_{20} + x_{21}}{5} = \frac{127 + 128}{2} = 127.5$

unteres Quartil : $\frac{x_{10} + x_{11}}{2} = \frac{118 + 119}{2} = 118.5$

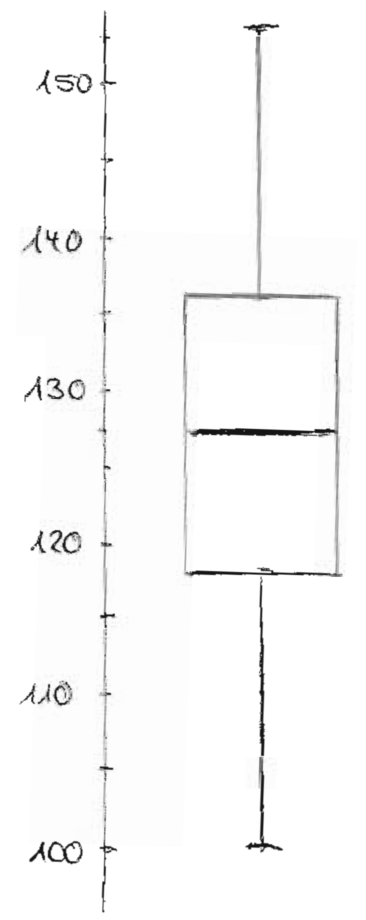
oberes Quartil : $\frac{x_{30} + x_{31}}{2} = \frac{135 + 136}{2} = 135.5$

IQR (Interquartilsabstand) : $135.5 - 118.5 = 17$

Whisker : maximal das 1.5-fache des IQR : 25.5

unterer Whisker endet bei 102 , da $118.5 - 25.5 = 93$ nicht in der Datenmenge

oberer Whisker endet bei 153, da $135.5 + 25.5 = 161$ nicht in der Datenmenge



Probeklausur SS 2017 - Lösungen

Aufgabe 2

b) Binomialverteilung

$n=5 \quad k=4 \quad p=0.8 \quad q=1-0.8=0.2$

$$P(X=4) = \binom{5}{4} \cdot 0{,}8^4 \cdot 0.2^1 = 5 \cdot 0{,}4096 \cdot 0{,}2$$
$$= 0.4096$$

Ergebnis: 40.96 %

c) Normalverteilung: Übergang zur Standardnormalverteilung

$$P(88 \le X \le 103) = \Phi\left(\frac{103-95}{7}\right) - \Phi\left(\frac{88-95}{7}\right)$$
$$= \Phi(1{,}14) - \Phi(-1)$$
$$= \Phi(1{,}14) - (1 - \Phi(1))$$
$$\underset{\text{Tabelle}}{=} 0{,}8729 - 1 + 0{,}8413$$
$$= 0.7142$$

Ergebnis: 71.42 %

Probeklausur SS2017 – Lösungen

Aufgabe 3

a)(1) $z = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$ $\qquad |z| = \sqrt{2^2 \cdot 2 + 2^2 \cdot 2} = \sqrt{16} = 4$

$\varphi = \arctan \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4} \; (= 45^\circ)$

$$z^7 = |z|^7 (\cos(7 \cdot 45^\circ) + i \sin(7 \cdot 45^\circ))$$
$$= 4^7 (\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ)$$
$$= 16384 (0.7071 + i(-0.7071))$$
$$= \underline{\underline{11585{,}23 - 11585{,}23 i}}$$

(2) $z = 8\sqrt{2} + 8\sqrt{2}i$ $\qquad |z| = \sqrt{8^2 \cdot 2 + 8^2 \cdot 2} = \sqrt{256} = 16$

$\varphi = \arctan \frac{8\sqrt{2}}{8\sqrt{2}} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4} \; (= 45^\circ)$

4 Wurzeln : Betrag aller Wurzeln : $\sqrt[4]{16} = 2$

1. Wurzel: $z_0 = 2\left(\cos\left(\frac{45^\circ}{4}\right) + i \sin\left(\frac{45^\circ}{4}\right)\right)$
$= 2(\cos 11{,}25^\circ + i \sin 11{,}25^\circ)$
$= \underline{1{,}9615 + 0{,}3901 i}$

2. Wurzel: $z_1 = 2(\cos(11{,}25^\circ + 90^\circ) + i \sin(11{,}25^\circ + 90^\circ))$
$= \underline{-0{,}3901 + 1{,}9615 i}$

3. Wurzel: $z_2 = 2(\cos(11{,}25^\circ + 2 \cdot 90^\circ) + i \sin(11{,}25^\circ + 2 \cdot 90^\circ))$
$= \underline{-1{,}9615 - 0{,}3901 i}$

4. Wurzel: $z_3 = 2(\cos(11{,}25^\circ + 3 \cdot 90^\circ) + i \sin(11{,}25^\circ + 3 \cdot 90^\circ))$
$= \underline{0{,}3901 - 1{,}9615 i}$

b) $|z_1| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

$|z_2| = \sqrt{a^2 + 4}$

$\varphi_{z_1} = \arctan \frac{4}{3} = 53{,}13^\circ$

$\varphi_{z_2} = \arctan \frac{2}{a} = 53{,}13^\circ + 72^\circ = 125{,}13^\circ$

$\tan 125{,}13^\circ = -1{,}421 = \frac{2}{a}$

$\Rightarrow a = -1{,}407$

Lösung: $\underline{\underline{z = -1{,}407 + 2i}}$

Probeklausur SS2017 - Lösungen

Aufgabe 3

c) $y'' - 2x = 0 \quad | + 2x$

$$y'' = 2x \quad \text{Integration}$$

$$y' = \frac{2x^2}{2} + C_1 = x^2 + C_1 \quad \text{Integration}$$

$$y = \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2 \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Auswerten der Anfangsbedingungen:

$y(0) = 5$: $\quad 5 = \frac{0^3}{3} + C_1 \cdot 0 + C_2$

$\Rightarrow C_2 = 5$

$y'(0) = 3$: $\quad 3 = 0^2 + C_1$

$\Rightarrow C_1 = 3$

Lösung der DGL:

$$\underline{\underline{y = \frac{1}{3}x^3 + 3x + 5}}$$

Probeklausur SS2017 - Lösungen

Aufgabe 4

a) $f(x,y) = 5x \cdot e^{x-4y^2}$ $\quad x=1,\ y=0.5 \quad dx=0.05 \quad dy=0.001$

$f_x(x,y) = 5e^{x-4y^2} + 5x \cdot e^{x-4y^2} \cdot 1$ (Produktregel)

$= 5e^{x-4y^2}(1+x)$

$f_y(x,y) = -5x \cdot 8y \cdot e^{x-4y^2} = -40xy \cdot e^{x-4y^2}$ (Kettenregel)

$df = f_x\,dx + f_y\,dy$

$df = (5 \cdot e^{1-4 \cdot 0.5^2} \cdot (1+1)) \cdot 0.05 + (-40 \cdot 1 \cdot 0.5 \cdot e^{1-4 \cdot 0.5^2}) \cdot 0.001$

$df = 0.5 - 0.2 = \underline{\underline{0.48}}$

$\Delta f = |5 \cdot 1 \cdot e^0 - 5 \cdot 1.05 \cdot e^{1.05 - 4 \cdot 0.501^2}|$

$= |-0.49711| = \underline{\underline{0.4971}}$

b) $f(x,y) = 2x^2 - 8x - y^3 + 9y^2 - 15y$

Notw: $f_x = 4x - 8 = 0$ I

$f_y = -3y^2 + 18y - 15 = 0$ II

Aus I: $4x = 8 \Leftrightarrow x = 2$

Aus II: Lösen der quadr. Gleichung: $y_{1,2} = \frac{-18 \pm \sqrt{18^2 - 180}}{-6}$

$= \frac{-18 \pm \sqrt{144}}{-6}$

$y_1 = 1 \quad y_2 = 5$

Kandidaten: $(2,1)$ und $(2,5)$

Hinr.: $f_{xx} = 4 \quad f_{xy} = f_{yx} = 0 \quad f_{yy} = -6y + 18$

$\Delta(2,1) = 4(-6 \cdot 1 + 18) = 48 > 0$ mit $f_{xx} = 4 > 0$

$\Rightarrow$ Minimum bei $(2,1)$

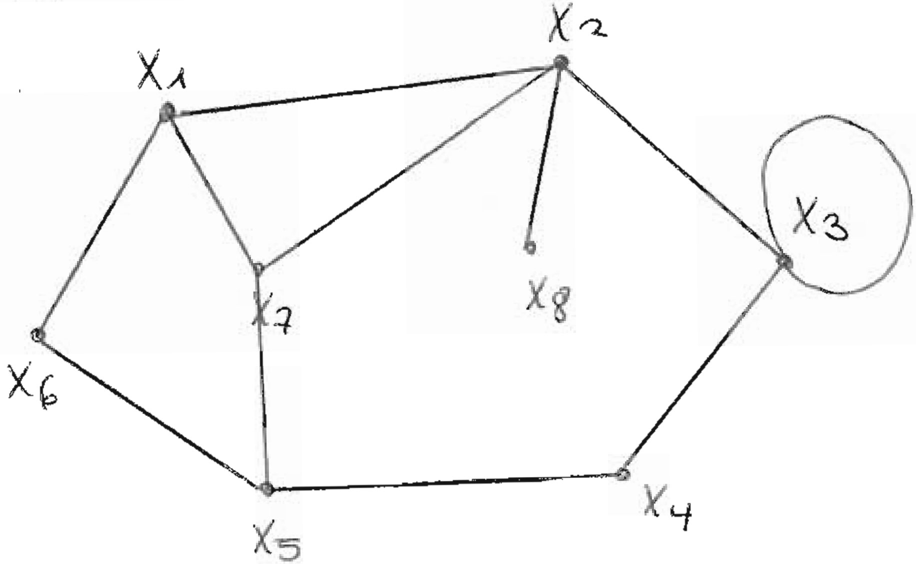
$\Delta(2,5) = 4(-6 \cdot 5 + 18) = -48 < 0$

$\Rightarrow$ Sattelpunkt bei $(2,5)$

Probeklausur SS2017 - Lösungen

Aufgabe 5

a)



zusammenhängend, da keine isolierten Knoten
nicht schlicht, da Schlinge bei x_3
nicht vollständig, da z.B. zwischen x_8 und x_4 keine Kante.
nicht gerichtet, also kein Digraph

b) Knotengrade: Zeilensumme bzw. Spaltensumme