

Wahrscheinlichkeit

Würfel, 12x werfen

rel. Häufigkeit

Stichprobe, $N=12$

$$h_1 = \frac{n_1}{N} = \frac{3}{12} = 0.25$$

(2, 5, 1, 3, 1, 1, 6, 4
2, 3, 6, 4)

ideal
 $\xrightarrow{N \rightarrow \infty}$ $\frac{1}{6} = P_1 = 0.1666$

Wahrscheinlichkeitstheorie

Bsp zu Def 10-9

a) Würfel $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

mögl. Ereignisse: $A = \{6\}$

"Sechs"

$B = \{1, 3, 5\}$

"ungerade"

$C = \{1, 2\}$

"< 3"

zu C komplementär $\bar{C} = \Omega \setminus C = \{3, 4, 5, 6\}$

" B "

$\bar{B} = \Omega \setminus B = \{2, 4, 6\}$

"gerade"

b) Roulette $\Omega = \{0, 1, 2, \dots, 36\}$

Ereignisse z.B. "gerade"

"ungerade"

"1 - 12"

usw

Folgerung aus den Wahrsch. axiomen

1. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

denn: \bar{A} und A sind zueinander unvereinbar

$$P(A) + P(\bar{A}) \stackrel{\text{Ax. 3}}{=} P(A \cup \bar{A}) = P(\Omega) \stackrel{\text{Ax. 2}}{=} 1$$

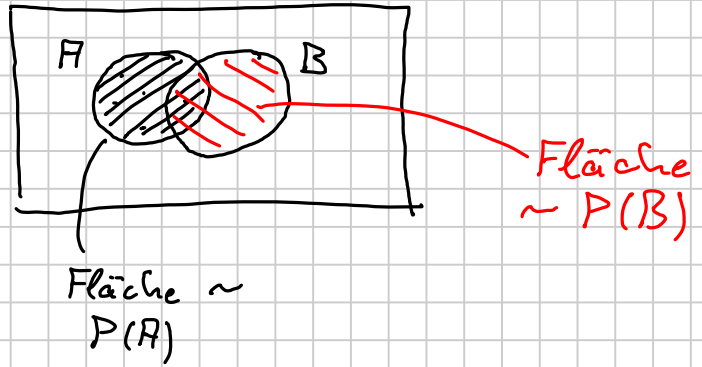
$$\Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

2. $P(\{\}) = 0$

denn: spezialisiere Nr. 1 auf $\bar{A} = \{\}$ und $A = \Omega$

$$3. P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

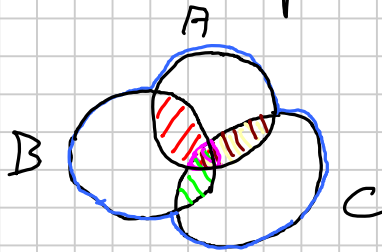
Graphische Erklärung



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

die doppelt gezählte Fläche einmal wieder abziehen

Inklusion-Exklusion für 3 Mengen A, B, C



$$|A \cup B \cup C|$$

$$= |A| + |B| + |C|$$

$$- |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C|$$

$$+ |A \cap B \cap C|$$

Verschiedene Dinge die man zählen kann beim Urnenexperiment

Stichprobe: k Elemente aus Urne mit n Kugeln entnehmen

Ergebnis	geordnet (Variation)	ungeordnet (Kombination)
Ziehen mit Zurücklegen ($\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$)	Wörter aus Alphabet	geheime Wahlausgänge
Ziehen ohne Zurücklegen ($\mathbb{Z} \circ \mathbb{Z}$)	Pferdewetten	Lotto "6 aus 49" Los-ziehen, k-fach

Wie viele Wörter Länge 5 aus Alphabet $\{a, b, c, d\}$ ("abbca" und "aaebb" sind versch. Worte)

Pferdewetten: 8 Pferde, wieviele mögliche Wettscheine (Erster, Zweiter, Dritter)

Beweis / Erklärung zu Satz 10-4

1) ZmZ / geordnet: jeder Platz der k-elementigen Teilmenge kann mit n Elementen besetzt werden:

$$\underbrace{\underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot n \cdot n}_{k\text{-mal}}}_{k\text{-mal}} = n^k$$

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{5 \cdot 4 \cdot 3}$$

2) ZoZ / geordnet:

$$\underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}_{k\text{-mal}}$$

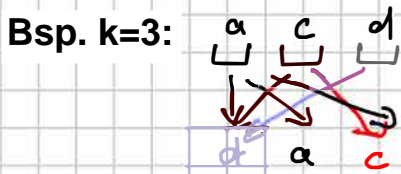
$$= \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \dots \cdot 1}$$

3) ZoZ / ungeordnet: (Lotto)

wie bei 2), also $\frac{n!}{(n-k)!}$, nur dass wir alle Permutationen der k-elementigen Liste als ein Resultat zählen

Wieviele Permutationen gibt es?



$$k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \dots \cdot 1 = k!$$

⇒ es gibt $k!$ solche Permutationen

D.h. Anzahl bei 3) ist

$$\frac{\left(\frac{n!}{(n-k)!} \right)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! k!} = \binom{n}{k} \quad \text{Binomial koeff.}$$

Übungen

Ü1: a) Wörter Länge 4 aus 26-er-Alphabet

$$n = 26, k = 4, \text{ ZmZ, geordnet: } n^k = \underline{\underline{26^4}}$$

b) Wörter Länge 4 aus 5-er-Alphabet

$$n = 5, k = 4, \Rightarrow n^k = 5^4$$

Laplace'scher Spezialfall, alle Worte gleichwahrsch.

$$P(A) = \frac{\text{günstige Ereignisse}}{\text{alle Ereignisse}} = \frac{5^4}{26^4} = \left(\frac{5}{26}\right)^4 = 0.137\%$$

Ü2 a) Pferde wette: ZZZ, geordnet: $\frac{n!}{(n-k)!}$

$$n = 8, k = 3 \Rightarrow \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = \underline{\underline{336}}$$

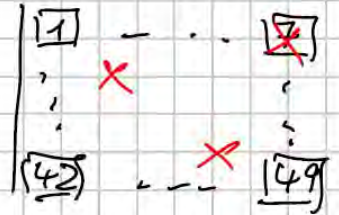
b) $P(\text{zufällig den Ersten richtig}) = \frac{1}{8}$

$$\frac{1 \cdot 7 \cdot 6}{8 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{1}{8}$$

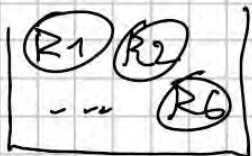
Ü3 (Lotto)

a) ZZZ, Kombination

$$\text{Anzahl } \binom{49}{6} \approx 13.9 \cdot 10^6$$



b) Jede Ziehung hat 6 Richtige, 43 Falsche



4 mal

$$\text{Anzahl } \binom{6}{4}$$



2 mal

$$\text{Anzahl } \binom{43}{2}$$

\Rightarrow Wertscheine mit genau 4 Richt.

Insgesamt $P(\text{"4 Richtige"}) = \frac{\binom{6}{4} \binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} = 0.000968 \approx \frac{1}{1000}$

\uparrow
Laplace

ü4

Länge $n = 5$

- (1) platziere 2 a's an den Stellen $1, \dots, 5$
- (2) fülle den Rest mit b's oder c's auf

Zu (1) Ziehen aus Positionsmenge $\begin{matrix} \textcircled{1} & \textcircled{2} \\ \dots & \textcircled{5} \end{matrix} \Rightarrow 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
 $\Rightarrow \binom{5}{2}$
Kombi

Zu (2) es verbleiben 3 Plätze, mit b oder c füllen $\Rightarrow 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ Möglichk.

Insgesamt: $\binom{5}{2} \cdot 2^3 = 10 \cdot 8 = \underline{\underline{80}}$ solche Wörter

10 $\left\{ \begin{array}{l} aa*** \\ a**a** \\ a***a* \\ \vdots \\ **a**aa \end{array} \right.$ $*$ = b oder c

ü5

$n = 3$ Kandidaten

$k = 60$ Wähler

Anzahl Wahlausgänge $\binom{n+k-1}{k} = \binom{62}{60}$
 $= \underline{\underline{1891}} = \frac{62 \cdot 61}{2}$