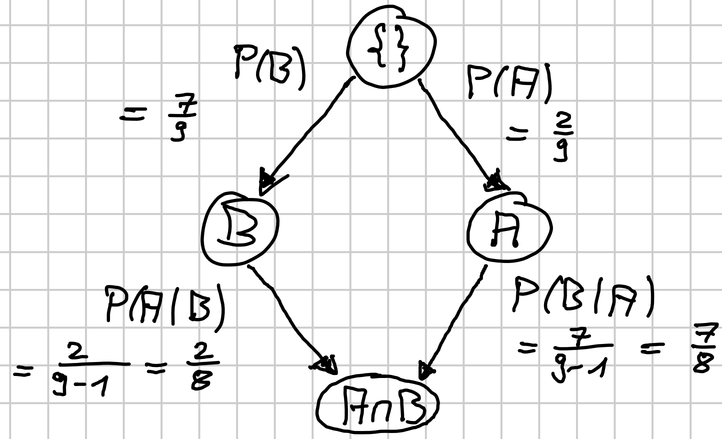
Bedingte Wahrscheinlichkeit



Urnenbeispiel: 2 w und 7 s Kugeln in Urne

A: Alex zieht weiße Kugel

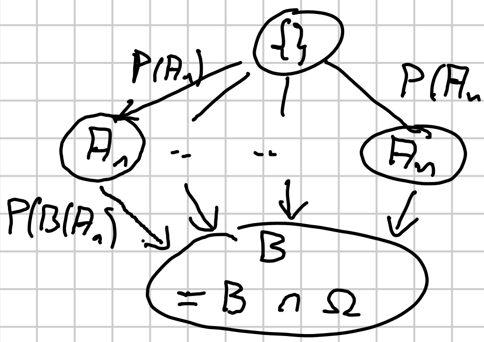
B: Ich ziehe keine weiße Kugel

$$P(A \cap B) = \frac{7}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{2}{9} \cdot \frac{7}{8} = \frac{14}{72}$$

Satz von der totale Wahrsch

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)\, P(A_i)$$

Bild:



$\bigcup A_i = \Omega$

$\boxed{\sum P(B|A_i)\, P(A_i) = P(B)}$

$= B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)$

Beispiel: Sei $A_1 \cup A_2 = \Omega$, $A_1 \cap A_2 = \{\}$ und sei

	A_1	A_2
$P(A_i)$	0.4	0.6
$P(B\mid A_i)$	0.1	0.2

bekannt. Was ist $P(A_i \mid B)$, $i = 1, 2$?

Lsg. $P(B) \overset{S10\text{-}17}{=} \sum_{i=1}^{2} P(B\mid A_i)\, P(A_i) = 0.1 \cdot 0.4 + 0.2 \cdot 0.6 = 0.16$

Mit Bayes $P(A_1 \mid B) = \dfrac{P(B\mid A_1)\, P(A_1)}{P(B)} = \dfrac{0.1 \cdot 0.4}{0.16} = \underline{\underline{0.25}}$

$$P(A_2 \mid B) = \frac{P(B\mid A_2)\, P(A_2)}{P(B)} = \frac{0.2 \cdot 0.6}{0.16} = \underline{\underline{0.75}}$$

Ü Lieferanten

	L1	L2	L3	
Anteil	45%	35%	20%	$= P(A_i)$
Ausschuss	2%	3%	1%	$= P(B\mid A_i)$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(B\mid A_i)\, P(A_i) = 2\% \cdot 45\% + 3\% \cdot 35\% + 1\% \cdot 20\%$$

$$= \underline{\underline{2.15\%}}$$

Bayes

$$P(A_1 \mid B) = \frac{P(B\mid A_1)\, P(A_1)}{P(B)} = \frac{2\% \cdot 45\%}{2.15\%} \approx 42\%$$

$$P(A_2 \mid B) = \quad \ldots \quad \approx 49\%$$

$$P(A_3 \mid B) = \quad \ldots \quad \approx \underline{\underline{9\%}}$$

Stat. Unabhängig

Def. Bed. Wahrsch. $P(B\mid A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ (falls $P(A) \neq 0$)

D10-25

$\Longleftrightarrow \quad P(B|A) = \frac{\cancel{P(A)} \cdot P(B)}{\cancel{P(A)}}$

$\Longleftrightarrow \quad \boxed{P(B|A) = P(B)}$

Ziegenproblem erklärt

Lösung: O.B.d.A. : Kandidat wählt Tür 3

A_1 : Auto hinter Tür 1 , A_2 , A_3 analog

M_1 : Moderator öffnet Tür 1

Es gilt: $P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=1/3$

Als Übung ausrechnen

- $P(M_1|A_1)$, $P(M_1|A_2)$, $P(M_1|A_3)$
- $P(M_1)$
- $P(A_1|M_1)$, $P(A_2|M_1)$, $P(A_3|M_1)$

Lsg $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$

$P(M_1|A_1) = 0$

$P(M_1|A_2) = 1$

$P(M_1|A_3) = 0.5$

$P(M_1) = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 0.5 \cdot \frac{1}{3} = \underline{\underline{50\%}}$

S10-17

$P(A_1|M_1) \underset{\uparrow \text{Bayes}}{=} \frac{P(M_1|A_1)\, P(A_1)}{P(M_1)} = \frac{0 \cdot \frac{1}{3}}{50\%} = 0$

$P(A_2|M_1) = \frac{P(M|A_2) \cdot P(A_2)}{P(M_1)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{50\%} \approx \underline{\underline{66\%}}$

$P(A_3|M_1) \approx \underline{\underline{33\%}}$

Umentscheiden verdoppelt also die Gewinnchancen!