Multiplikation komplexer Zahlen

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2)$$
$$= a_1 a_2 + (ib_1)(ib_2) + i b_1 a_2 + a_1 \cdot i b_2$$
$$= a_1 a_2 + \underbrace{i^2}_{=-1} b_1 b_2 + i(b_1 a_2 + a_1 b_2)$$
$$= \underbrace{a_1 a_2 - b_1 b_2}_{Re(z_1 z_2)} + i \underbrace{(b_1 a_2 + a_1 b_2)}_{Im(z_1 z_2)}$$

Division komplexer Zahlen

$$z = \frac{1+2i}{1-i} \quad | \text{ erweitern mit } (1-i)^* \text{ nach Satz S11-2}$$
$$= \frac{(1+2i)\cdot(1+i)}{(1-i)\cdot(1+i)}$$
$$= \frac{1 + 2i^2 + 2i + i}{1^2 + (-1)^2} = \frac{1-2+3i}{2} = \underbrace{-\frac{1}{2}}_{Re\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} + \underbrace{\frac{3}{2}}_{Im\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} i$$

Ü

a) $i(3-2i) = i3 - 2\underbrace{i^2}_{=-1} = 3i - (-2) = \underline{\underline{2+3i}}$

b) $|3 - 4i| \overset{\text{Kurzform}}{=} \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \underline{\underline{5}}$

Langform: $|z| = \sqrt{z \cdot z^*}$

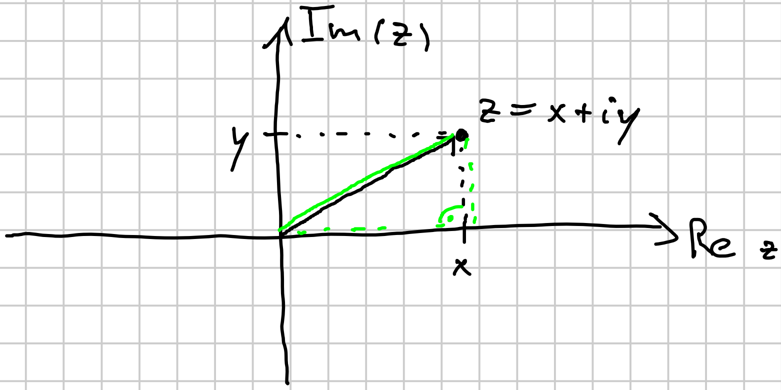
hier: $|3-4i| = \sqrt{(3-4i)(3+4i)} = \sqrt{3^2 - (4i)^2} = \sqrt{3^2+4^2}$

$$= \sqrt{25} = \underline{\underline{5}}$$

c) $\frac{3+4i}{2-i} = \frac{(3+4i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{6+4i^2+8i+3i}{2^2+(-1)^2}$

$$= \frac{6-4+11i}{4+1} = \frac{+2+11i}{5}$$
$$= \underline{\underline{+\frac{2}{5} + \frac{11}{5} i}}$$

Gauß'sche Zahlenebene



(reelle Zahlenachse)

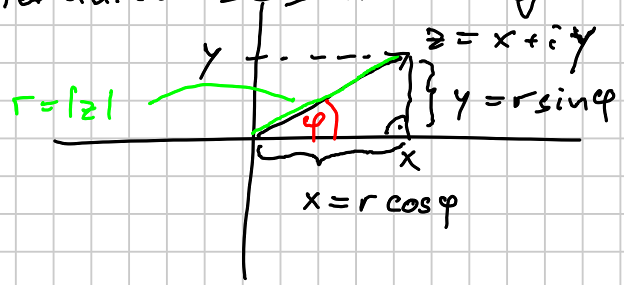
$$z = x + iy$$

z wird als Vektorpfeil in Gauß'scher Zahlenebene (komplexe Ebene) verstanden

(Analogie Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$)

Länge Vektor z ist Betrag von z: $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Alternative Beschreibung



über Trigonometrie kann man x, y durch r und φ ausdrücken

$$x = r\cos\varphi \qquad \cos\varphi = \frac{x}{r}$$

$$\tan\varphi = \frac{y}{x}$$

$$y = r\sin\varphi \qquad \sin\varphi = \frac{y}{r}$$

Also kann man auch z alternativ darstellen

$$z = \underbrace{x + iy} = r\cos\varphi + i r\sin\varphi$$

kartesische Form

$$= r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$ (trigonometr. Form)

?

$$= r\,e^{i\varphi}$$ (Exponentialform)

Es gilt die Eulersche Formel

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi}$$

Erklärung (Beweis) über Taylor-Reihe

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \qquad \text{Setze } x = i\varphi$$

$$e^{i\varphi} = 1 + \frac{(i\varphi)}{1!} + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\varphi)^4}{4!} + \dots$$

$$= 1 + \frac{i\varphi}{1!} - \frac{\varphi^2}{2!} - \frac{i\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \frac{i\varphi^5}{5!} + \dots$$

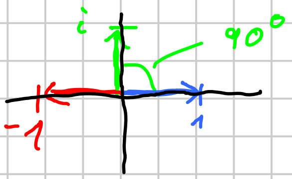
$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - + \dots$$

$$i\sin\varphi = i\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!}\right)$$

Deshalb $\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi}$ q.e.d.

Übung

φ	Grad
0	$0°$
$\frac{\pi}{2}$	$90°$
π	$180°$
2π	$360°$



$z = e^{i \cdot 0} = 1$

$z = e^{i\pi/2} = i$

$z = e^{i\pi} = -1$

$z = e^{i2\pi} = 1$

z	Re(z) $\cos\varphi$	Im(z) $\sin\varphi$
$e^{i\cdot 0}$	1	0
$e^{i\pi}$	-1	0
$e^{i\frac{\pi}{2}}$	0	1
$e^{i2\pi}$	1	0