

$$\textcircled{\text{Ü}} \quad s''(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

a) Ordnung?, homogen?, linear?

2. Ordn., inhomogen, linear, mit konst. Koeff.

b) allg. Lsg $s(t)$

c) spez. Lsg f. $s'(1) = 2$, $s(1) = 2$

zu b) N.R. Was ist Stammfkt zu $\frac{1}{2\sqrt{t}}$?

Es ist $\sqrt{t}$

(Nachrechnen durch Ableiten)

$$s'(t) = \int \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \sqrt{t} + C_1$$

$$s(t) = \int (\sqrt{t} + C_1) dt = \underline{\underline{\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C_1 t + C_2}} \quad \text{allg. Lsg.}$$

zu c) $s'(1) = \sqrt{1} + C_1 = 2 \Rightarrow C_1 = 2 - \sqrt{1} = \underline{\underline{1}}$

$$s(1) = \frac{2}{3} 1^{\frac{3}{2}} + 1 \cdot 1 + C_2 = 2$$

$$\Rightarrow C_2 = 2 - 1 - \frac{2}{3} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{s(t) = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + t + \frac{1}{3}} \quad \text{spez. Lsg}$$

Homogene lineare DGL mit konst. Koeff.

DGL	Antwort
$x''(t) = x(t)$	$x(t) = e^t$ oder $x(t) = e^{-t}$ $x(t) = 0$
$x''(t) = ax(t)$	$x(t) = e^{\sqrt{a}t}$ oder $x(t) = e^{-\sqrt{a}t}$
$x''(t) = -x(t)$	$x(t) = e^{it}$ oder $x(t) = e^{-it}$ $x(t) = \sin t$ $= \cos t$
$x''(t) = -ax(t)$	$x(t) = e^{i\sqrt{a}t}$ oder $x(t) = e^{-i\sqrt{a}t}$

$$\begin{array}{l} \text{N.R.} \\ (e^{it})' = i e^{it} \\ (e^{it})'' = i^2 e^{it} \\ = -e^{it} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{N.R.} \\ (e^{-t})' = -e^{-t} \\ (e^{-t})'' = (-1)^2 e^{-t} \\ = e^{-t} \end{array}$$

Beispiel

$$x''(t) + 4x(t) = 0$$

Ansatz: $x(t) = e^{\lambda t}$

$$\Rightarrow \lambda^2 e^{\lambda t} + 4 e^{\lambda t} = 0$$

$$(\lambda^2 + 4) \underbrace{e^{\lambda t}}_{\neq 0}$$

$$\Rightarrow (\lambda^2 + 4) = 0$$

$$\lambda^2 = -4$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 2i$$

$$\Rightarrow x_1(t) = e^{2it} \quad \text{und} \quad x_2(t) = e^{-2it} \quad \text{sind Lsg}$$

S. 12-3, Nr 2
 $\Rightarrow c_1 e^{2it} + c_2 e^{-2it}$ ist auch Lsg (Superpositionsprinzip) $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

(ii) DGL $x''(t) + 4x'(t) + 404x(t)$ lösen

Lsg $x(t) = e^{\lambda t}$, $x'(t) = \lambda e^{\lambda t}$ einsetzen
 $x''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$

$$\Rightarrow \lambda^2 e^{\lambda t} + 4\lambda e^{\lambda t} + 404 e^{\lambda t} = 0 \quad | : e^{\lambda t}$$

$$(\lambda^2 + 4\lambda + 404) = 0$$

$$\lambda^2 + 4\lambda + 2^2 = 2^2 - 404$$

$$(\lambda + 2)^2 = -400$$

$$\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{-400}$$

$$= -2 \pm 20i$$

$$\Rightarrow x_1(t) = e^{-2t} e^{20it}$$

ist Lsg

$$x_2(t) = e^{-2t} e^{-20it}$$

" "

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} x_1(t) &= \frac{1}{2} e^{-2t} e^{20it} \\ \frac{1}{2} x_2(t) &= \frac{1}{2} e^{-2t} e^{-20it} \end{aligned} \quad | \oplus$$

$$= e^{-2t} \frac{1}{2} (e^{20it} + e^{-20it})$$

Eulersche Formel
 $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$

$$= e^{-2t} \frac{1}{2} (\cos 20t + i \sin 20t + \cos(20t) + i \sin(-20t))$$

$$= e^{-2t} \frac{1}{2} 2 \cos 20t$$

$$= \underline{\underline{e^{-2t} \cos(20t)}}$$

(ii) $x''(t) - 9x(t) = 0$, $x'(0) = 1$, $x(0) = 0$

Lsg $x(t) = \frac{1}{6} e^{3t} - \frac{1}{6} e^{-3t}$
