

Beweis zu § 10-4

	Vari	Kombi
ZmZ	(1)	(4)
ZoZ	(2)	(3)

① ZmZ, Variation

Liste mit k Plätzen

$$\underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{k\text{-mal}} = \underline{\underline{n^k}}$$

② ZoZ, Variation

$$\underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}_{k \text{ Plätze}} = \underline{\underline{\frac{n!}{(n-k)!}}}$$

← $n(n-1) \cdot \dots \cdot 1$

Bsp: $n = 10, k = 3$:

$$\underbrace{10 \cdot 9 \cdot 8}_{3\text{-mal}} \quad \swarrow \quad 10-3+1$$

Spezialfall $k = n$ (Permutation)

$$\frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \underline{\underline{n!}}$$

③ ZoZ, Kombination

wie bei Fall ② nur dass wir die Permutationen der k-Liste nicht ^{mehrfach} ~~doppelt~~ zählen dürfen

$$k! \left\{ \begin{array}{l} [1, 5, 2] \\ [1, 2, 5] \\ [5, 1, 2] \\ \vdots \\ [2, 1, 5] \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{Bsp } \underline{\underline{k=3}} \\ \text{sind nur 1x zu} \\ \text{zählen } \{1, 5, 2\} \end{array}$$

Also: Formel aus ② durch $k!$ dividieren

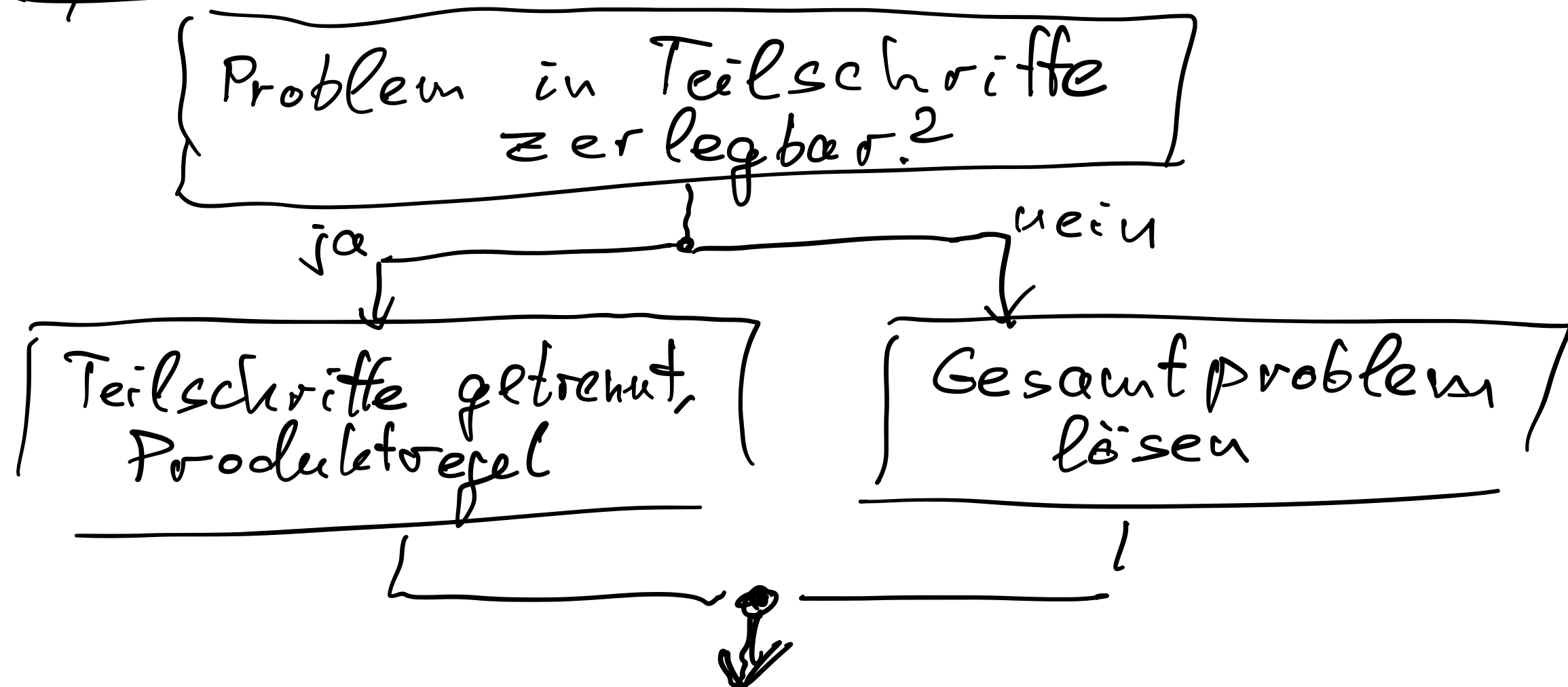
$$\text{Anzahl bei ③: } \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{k!} = \underline{\underline{\binom{n}{k}}}$$

④ o. Bew:

$$\text{Anzahl bei ④ } \binom{n+k-1}{n-1}$$

Beachte bei ZoZ ist immer $k \leq n$ bei ZmZ kann durchaus $k > n$

Systematisch Kombinatorik



je Teilschritt

Reihenfolge der ausgewählten Elemente wichtig?

ja

Variation
(Liste)

nein

Kombination
(Menge)

Treten Elemente mehrfach auf?

ZmZ

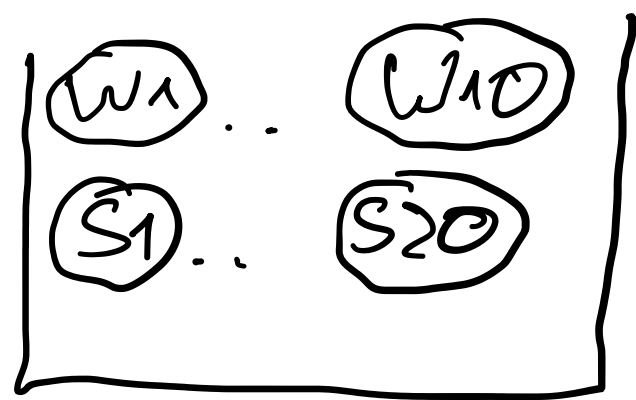
ZoZ

ja	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$	ja
nein	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$	nein

$$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k! (n+k-1-k)!}$$

$$= \frac{(n+k-1)!}{k! (n-1)!} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

Bsp: 10 weißen, 20 schwarzen Kugeln



Elementarereignisse
z.B. $\{W_1, W_7, W_5, S_3\}$ ←

$\{S_1, S_5, S_{20}, S_3\}$ ←

sind alle gleich wahrsch.

Ü1 Wörter Länge 4 aus 26er-Alphabet

a) 26^4 (ZmZ, Liste)

b) Laplace: $P(\text{ersten } S) = \frac{5^4}{26^4} = 0.13\%$

günstige Ereignisse
4er-Wort aus $\{a, b, c, d, e\}$
→ 5^4

Ü2 a) Anzahl Wettausgänge:

$$\begin{array}{ccc} 8 & \cdot & 7 & \cdot & 6 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 1. & & 2. & & 3. \end{array} = \frac{8!}{(8-3)!} = \underline{\underline{336}}$$

b) Wettausgänge bei denen Erster richtig

$$\begin{array}{ccc} 1 & \cdot & 7 & \cdot & 6 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 1. & & 2. & & 3. \end{array} = 42$$

$$P(\text{"Erster richtig"}) = \frac{42}{336} = \frac{1}{8} = \underline{\underline{12.5\%}}$$