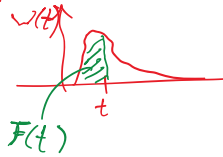


Verteil. fkt $F(t) = P(X \leq t)$
ist Stammfkt Wahrsch. dichte
 $w(t)$



$$F(b) - F(a) = \int_a^b w(t) dt$$



N.B. $\int_{-2}^2 x^2 dx = \left. \frac{1}{3} x^3 \right|_{-2}^2 = \frac{16}{3}$

Erwartungswert

X diskret: $E(X) = \sum_m x_m p_m = \mu$

X stetig: $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x w(x) dx = \mu$
 $\int_{-\infty}^{\infty} t w(t) dt$

$\text{Var}(X) = E((X - \mu)^2)$ gilt für stetig + diskret

Bsp.: Neue Zufallsvar $Z = 2X + 7$, $E(X) = \mu = 5$
Was ist $E(Z)$, $\text{Var}(Z)$?

Sei X diskret (geht für stetig genauso)

$$E(Z) = \sum_m z_m p_m = \sum_m (2x_m + 7) p_m$$

$$= 2 \underbrace{\sum_m x_m p_m}_{\mu (=5)} + \underbrace{\sum_m p_m}_{=1} = 17$$

$$= \mu_Z = 2\mu + 7 \quad (= 17 \text{ f. } \mu = 5)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(Z) &= E((Z - \mu_Z)^2) \\ &= E((2X + 7 - (2\mu + 7))^2) \\ &= E((2X - 2\mu)^2) \\ &= E(4(X - \mu)^2) = 4 E((X - \mu)^2) \\ &= \sum_m 4(x_m - \mu)^2 p_m = 4 \text{Var}(X) \\ &= 4 \underbrace{\sum_m (x_m - \mu)^2 p_m}_{\text{Var}(X)} \end{aligned}$$

Wenn $Z = aX + b$, dann $\text{Var}(Z) = a^2 \text{Var}(X)$

$$\sigma(Z) = a \sigma(X)$$

Erwartungswert Summe

Montag, 3. Mai 2021 11:30

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

Bew: über Doppelsumme

$$E(X+Y) = \sum_n \sum_m (x_m + y_n) p_m \cdot q_n$$

$\uparrow$ $\nwarrow$
 $P(X=x_m)$ $P(Y=y_n)$

$$= \sum_n \sum_m x_m p_m q_n + \sum_n \sum_m y_n p_m q_n$$

$$= \underbrace{\left(\sum_n q_n\right)}_{=1} \underbrace{\left(\sum_m x_m p_m\right)}_{E(X)} + \underbrace{\left(\sum_n y_n q_n\right)}_{E(Y)} \cdot \underbrace{\left(\sum_m p_m\right)}_{=1}$$

$$= E(X) + E(Y)$$

X stetig $P(X=x_m)=0$

X stetig, Wahrsch. d. $w(t)$, $\int_{-\infty}^{\infty} w(t) dt = 1$

Y stetig, $v(s)$, $\int_{-\infty}^{\infty} v(s) ds = 1$

$$E(X+Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (t+s) w(t) v(s) dt ds$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t w(t) dt v(s) ds + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s w(t) dt v(s) ds$$

$$\underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} t w(t) dt\right)}_{E(X)} \cdot \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} v(s) ds\right)}_1 + \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} w(t) dt\right)}_1 \cdot \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} s v(s) ds\right)}_{E(Y)}$$

$$= E(X) + E(Y)$$

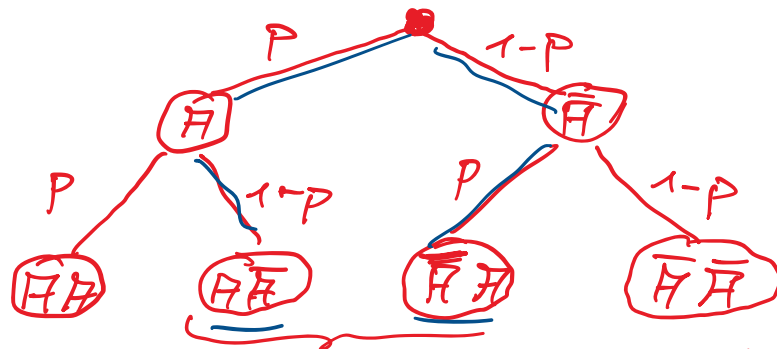
Binomialvert

Montag, 3. Mai 2021 11:53

Bsp. Binomialvert am Baum

Bernoulli-Kette Länge $n=2$

$$P(H) = p, \quad P(\bar{H}) = 1 - p$$



	$2 \times H$	$1 \times H$	$0 \times H$
P	$1 \cdot p^2$	$2p(1-p)$	$1 \cdot (1-p)^2$
	$\parallel$ $\binom{2}{2}$	$\parallel$ $\binom{2}{1}$	$\parallel$ $\binom{2}{0}$

Wann Binomial, wann andere Kombi-
inatorik-Technik?

Aufwort: "Bi-nomial" heißt "2 Namen"

=> Binomial nur anwendbar, wenn
genau zwei Ausgänge, wiederholt
und gleichzeitig ausgeführt
(ZuZ)

Urne mit $N=60$ Kugeln, 6 weiße
 2x ziehen mit/ohne Zurücklegen
 Was ist $P(\text{"weiß, weiß"}) = P(X=2)$?

Lösung

a) mit Zurücklegen = Binomialvert.

$$n=2$$

↑

NICHT 60
 denn Bernoulli-
 Kette hat
 Länge 2

$$p = \frac{6}{60} = 0.1, \quad k=2$$

$$P(X=2) = \binom{2}{2} p^2 q^0 = 1 \cdot \overset{p^2}{0.01} \cdot \overset{q}{1} = \underline{\underline{1\%}}$$

$$q = 1 - p = 0.9$$

b) ohne Zurücklegen = Hypergeom. Vert.

$$N=60, \quad S=6, \quad k=2, \quad n=2$$

$$P(X=2) = \frac{\binom{6}{2} \binom{54}{0}}{\binom{60}{2}} = \frac{6 \cdot 5}{60 \cdot 59} = \underline{\underline{0.847\%}}$$

$$= \frac{\left(\frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \cdot 1 \right)}{\left(\frac{60 \cdot 59}{2 \cdot 1} \right)} = \frac{6 \cdot 5}{60 \cdot 59}$$

Wg $N \gg n$ (hier $60 \gg 2$) ist
 Binomial recht gute Näherung
 für Hypergeom.