

Was ist $P(A|B)$?

Wahrsch., dass A (auch noch) eintritt, wenn B eingetreten ist

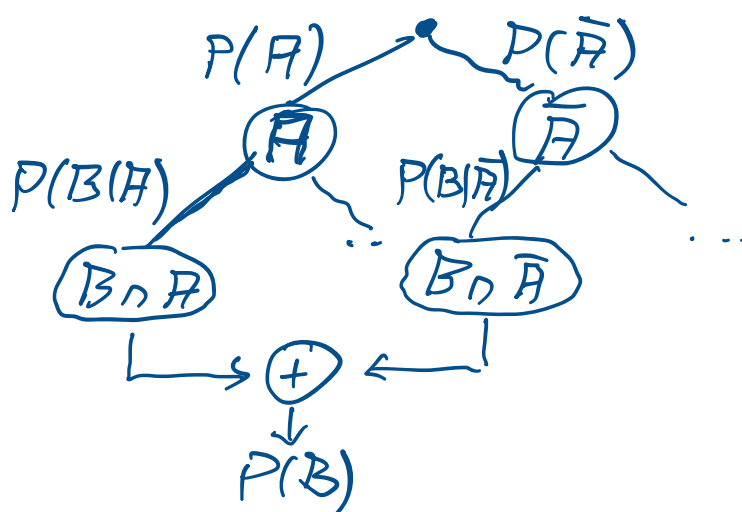
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (P(B) \neq 0)$$

→ "der Anteil der B -Ereignisse, die (auch noch) A erfüllen"

Was ist der Satz von der tot. Wahrsch.?

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})$$

Sei $P(B|A)$, $P(B|\bar{A})$ bekannt ebenso wie $P(A)$ und $P(\bar{A})$



$$A \cup \bar{A} = \Omega$$

$$A \cap \bar{A} = \{\}$$

gilt auch für

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$$

$$A_i \cap A_j = \{\} \text{ f. } i \neq j$$

Schnelltests haben wie alle Diagnosen zwei mögliche Fehlerarten:

	kr	g
pos	TP	FP
neg	FN	TN

	kr	g
pos	96.5%	0.5%
neg	3.5%	99.5%
	$\leq 100\%$	100%

also z.B. $P(\text{pos}|\text{kr}) = 96.5\%$

Sei die Inzidenzrate $100/100.000$

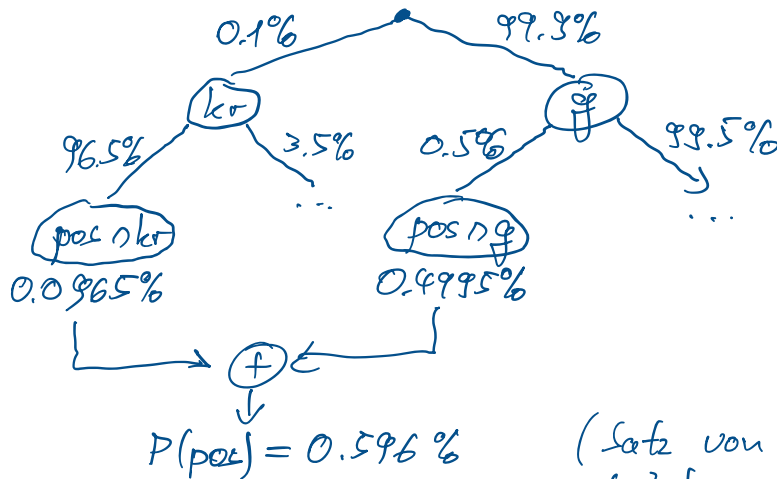
$\Rightarrow P(\text{kr}) = 0.1\%$ ("krank" = "infiziert")

Frage: Mit welcher Wahrsch. ist ein pos. getesteter Mensch infiziert ("kr")?

Schätzen!

A	B	C
<30%	30-60%	>60%

Lsg: Wir suchen $P(\text{kr}|\text{pos})$, kennen aber nur $P(\text{pos}|\text{kr}) \rightarrow$ Bayes



$P(\text{pos}) = 0.596\%$ (Satz von der tot. Wahrscheinl.)

$$P(\text{kr}|\text{pos}) \stackrel{\text{Bayes}}{=} \frac{P(\text{pos}|\text{kr}) P(\text{kr})}{P(\text{pos})} = \frac{0.0965\%}{0.596\%} = \underline{\underline{16.2\%}}$$

(bei 100 : $\approx 49\%$)

Nur etwa jeder 6. Positiv-Getestete ist auch infiziert (kr)

Tests also nutzlos?

Nein!

$$P(\text{kr}|\text{neg}) = \frac{3.5\% \cdot 0.1\%}{3.5\% \cdot 0.1\% + 99.5\% \cdot 99.9\%} = \underline{\underline{3.52 \cdot 10^{-5}}}$$

$$= 0.003\%$$

Ein Neg.-Getester ist mit 99.997% gesund!

Ü Lieferant

Montag, 17. Mai 2021

11:43

	A_1	A_2	A_3	Σ
Anteil	45%	35%	20%	100%
$B = \text{Ausschluss}$	2%	3%	1%	

$B = \text{"Teil ist fehlerhaft"}$

$A_i = \text{" " kommt von Lieferant } i \text{ " } i=1,2,3$

<u>Lsg</u>	A_1	A_2	A_3	
$P(B A_i)$	2%	3%	1%	$P(B)$
$P(B A_i) P(A_i)$	45% · 2%	35% · 3%	20% · 1%	2.15%
$P(A_i B) \text{ (*)}$	42%	49%	9%	

$$P(B) = \sum_i P(B|A_i) P(A_i) = 2.15\%$$

$$\text{(*) } P(A_1|B) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Bayes}}}{=} \frac{P(B|A_1) P(A_1)}{P(B)} = \frac{45\% \cdot 2\%}{2.15\%} = \underline{\underline{42\%}}$$

A und B stat. unabh. $\Leftrightarrow$

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) P(B)}$$

2. Formel: $P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)$

$$\stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{stat. unabh.}}}{=} P(B) \cdot P(A) \quad \left| : P(A) \right. \\ (P(A) \neq 0)$$

$$\Rightarrow \boxed{P(B|A) = P(B)} \quad \text{wenn A u. B stat. unabh.}$$

Bsp und Übung:

sehr einfaches Kartenspiel: 4x As, 4K

A: Alex zieht ein As
B: ich ziehe ein As

| Alex zieht
zuerst

a) Zoz

b) ZmZ

Was ist im Fall a) und b) jeweils:

$P(A)$, $P(B)$, $P(B|A)$, $P(A \cap B)$

Sind A und B stat. unabh.?

a) Zoz: $P(A) = \frac{4}{8}$ $P(B|A) = \frac{3}{7} \approx 43\%$

$$P(B) = P(B|A) P(A) + P(B|\bar{A}) P(\bar{A})$$

$$= \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{8} + \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{8} = \underline{\underline{\frac{4}{8} = 50\%}}$$

$$P(B) \neq P(B|A) \Rightarrow \underline{\text{stat. abh.}}$$

$$P(A \cap B) = P(B|A) P(A) = \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{8} \approx \underline{\underline{21\%}}$$

b) ZmZ: $P(A) = \frac{4}{8}$, $P(B|A) = \frac{4}{8}$

$$P(B) = \frac{4}{8}$$

$$P(B) = P(B|A) \Rightarrow \underline{\text{stat. unabh.}}$$

$$P(A \cap B) = P(B|A) P(A)$$

$$= \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{8} = \underline{\underline{25\%}}$$

Ziegenproblem

Montag, 17. Mai 2021

12:19

Definieren

A_1 : Auto ist hinter Tür 1
 A_2 : " " 2
 A_3 : " " 3

$$\left. \begin{array}{l} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \right\} P(A_i) = \frac{1}{3}$$

M_1 : Moderator öffnet Tür 1

O.B.d.A.: Kandidat entscheidet sich für
Tür 3

Berechnen Sie

- ⇒
- $P(M_1|A_1)=0$, $P(M_1|A_2)=1$, $P(M_1|A_3)=\frac{1}{2}$
 - $P(M_1) = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2} = 50\%$
 - $P(A_1|M_1)$, $P(A_2|M_1)$, $P(A_3|M_1)$

$$P(A_2|M_1) = \frac{P(M_1|A_2) \cdot P(A_2)}{P(M_1)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} = \underline{\underline{66\%}}$$

$$P(A_3|M_1) = \frac{P(M_1|A_3) P(A_3)}{P(M_1)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} = \underline{\underline{33\%}}$$