

a) Wie mit i rechnen?

Wie mit einer Variablen,
mit Sonderregel $i^2 = -1$

2) Was ist Imaginärteil?

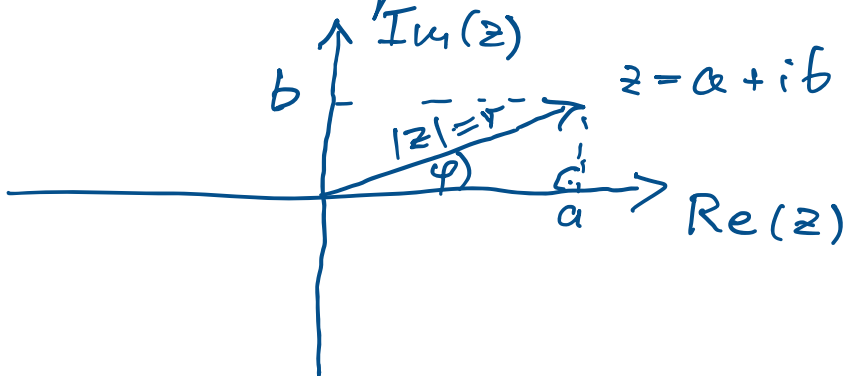
$$z = \underset{\uparrow}{a} + i \underset{\downarrow}{b} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Realteil $\text{Re}(z)$ Imag. teil $\text{Im}(z)$

3) Was ist Betrag $|z|$?

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

4) Was ist Gaußsche Zahlenebene?



$$z = a + ib \xrightarrow{\text{Trig}} r \cos \varphi + i r \sin \varphi = r e^{i\varphi}$$

algebraische Form

trigonometric
form

Exponential form

(a, b)

Polar form en
(r, φ)

Eulersche Formel

Mittwoch, 26. Mai 2021 11:13

Bew. Eulersche Formel

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

$$\boxed{x = i\varphi}$$

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= 1 + \frac{i\varphi}{1!} + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\varphi)^4}{4!} + \frac{(i\varphi)^5}{5!} + \dots \\ &= 1 + i \frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^2}{2!} - i \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + i \frac{\varphi^5}{5!} \end{aligned}$$

$$= \underbrace{\left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - + \dots \right)}_{\cos(\varphi)}$$

$$+ i \underbrace{\left(\frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - + \dots \right)}_{\sin(\varphi)}$$

$$\begin{aligned} i &= i \\ i^2 &= -1 \\ i^3 &= -i \\ i^4 &= 1 \\ i^5 &= i \\ i^6 &= -1 \end{aligned}$$

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)}$$

Eulersche Formel

Folgerung

$$\begin{aligned} e^{-i\varphi} &= \cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi) \\ &= \cos(\varphi) - i \sin(\varphi) \end{aligned}$$

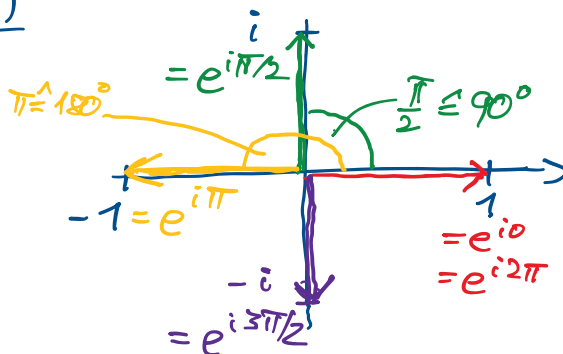
Ü komplexe Tabelle

Mittwoch, 26. Mai 2021

11:29

$$[e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi]$$

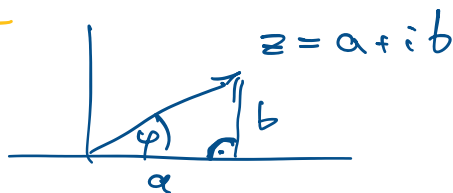
z	$\operatorname{Re}(z)$	$\operatorname{Im}(z)$
$e^{i0} = 1$	1	0
$e^{i\pi} = -1$	-1	0
$e^{i2\pi} = 1$	1	0
$e^{i\pi/2} = i$	0	1



$$\varphi = 0.5 \text{ (rad)}$$

$$\hat{=} 0.5 \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$[e^{i\pi} = -1]$$



$$\tan(\varphi) = \frac{b}{a} = \frac{\text{Gegen katete}}{\text{An katete}}$$

Bsp. 1) $z = \underbrace{-2}_x + \underbrace{2\sqrt{3}}_y i$ im 2. Quadrant

Umrechnung in Polar

$$r = |z| = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = 4$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2}{3}\pi \hat{=} 120^\circ$$

$$\Rightarrow z = r e^{i\varphi} = 4 e^{i\frac{2}{3}\pi} = 4 e^{i120^\circ}$$

2) $z = 3 e^{i\frac{5 \cdot 2\pi}{6}}$

Umrechnung in kartesisch

$$x = \operatorname{Re}(z) = 3 \cos\left(\frac{5 \cdot 2\pi}{6}\right) = 1.5$$

$$y = \operatorname{Im}(z) = 3 \sin\left(\frac{5 \cdot 2\pi}{6}\right) = -\frac{3}{2}\sqrt{3} = -2.598$$

ÜBUNG: Rechnen Sie von (x, y) wieder zurück auf (r, φ)

Lsg. $r = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9+9}{4}} = \sqrt{\frac{18}{4}} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \underline{\underline{3}}$

Da x pos und y neg: 4. Quadrant

$$\varphi = \arctan\left(\frac{-\frac{3}{2}\sqrt{3}}{\left(\frac{3}{2}\right)}\right) = \arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$$

$$\hat{=} -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3} \hat{=} 300^\circ \hat{=} -60^\circ$$

