

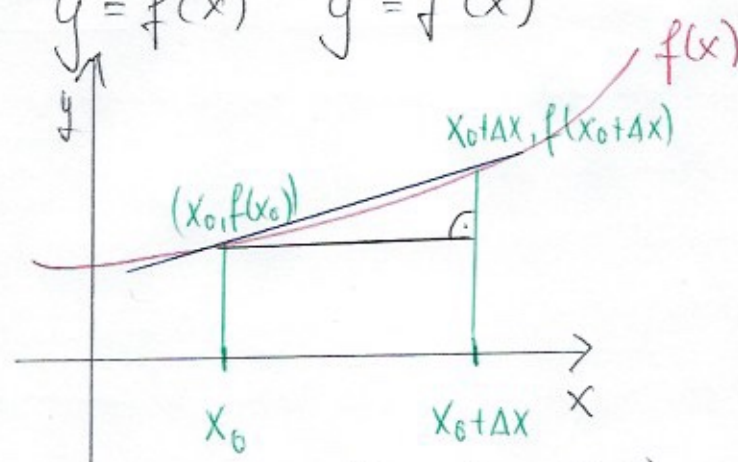
Alle bisher besprochenen Eigenschaften gelten für (10)
Funktionen mit n unabhängigen Variablen.

Im Falle $n=2$ (2 unabhängige Variablen) kann man sich alles hervorragend in 3D-Raum vorstellen.

Kannst eine weitere unabhängige Variable dazu, so versagt unsere Vorstellungskraft. Daher werden wir den Begriff "partiell Ableiten" für $n=2$ kennenlernen, die Definition dann auf ein beliebiges n ausweiten.
(Permanenzprinzip in der Mathematik)

Partielle Ableitungen 1. Ordnung

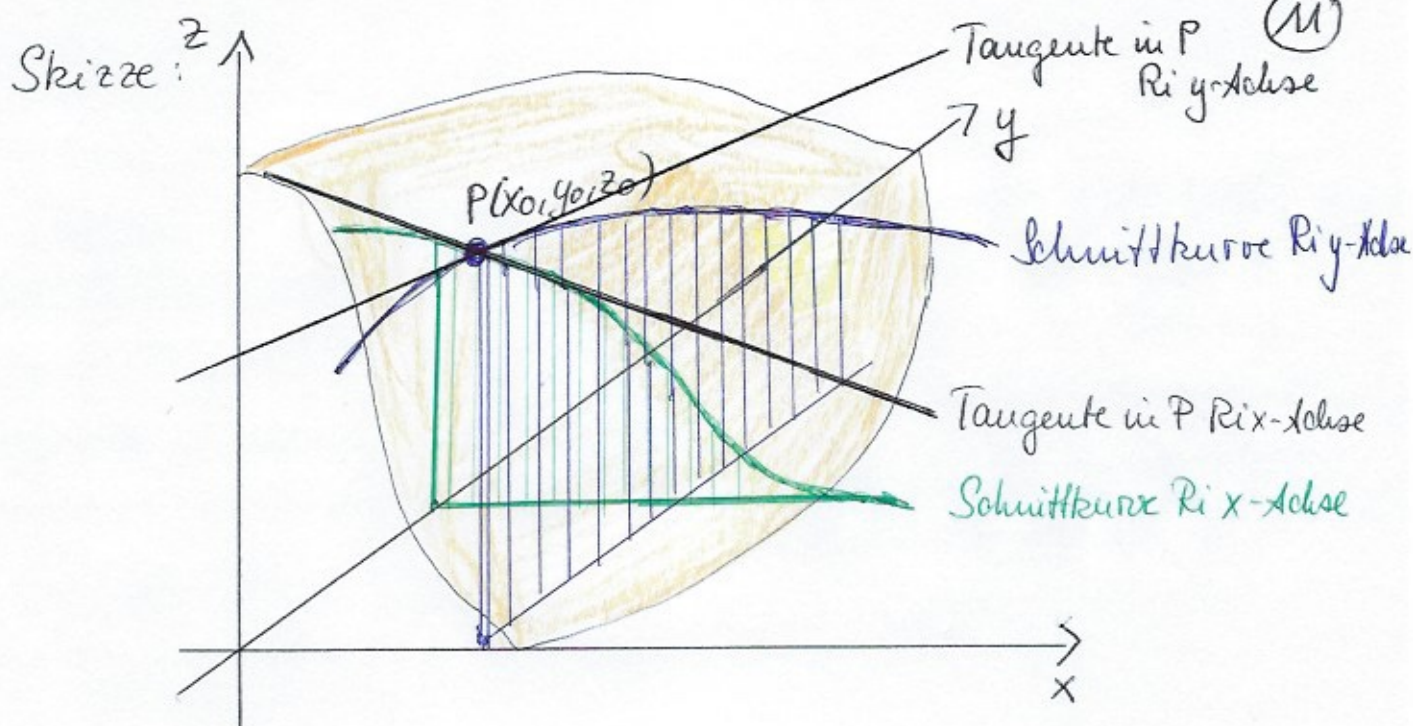
$n=1$ Wdh. $y = f(x)$ $y' = f'(x)$



$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x_0 + \Delta x - x_0}$$

Die Steigung in einem Punkt ist ein Grenzwert!

$n=2$ Man wählt als Richtung die Parallelen zu den Koordinatenachsen, d. h. man schneidet für einen Flächenpunkt mit den Koordinaten x_0, y_0, z_0 mit $z_0 = f(x_0, y_0)$ parallel zur x, z - bzw. y, z -Ebene. Als Schnittkurven erhält man Flächenkurven, die näher untersucht werden. Die Schnittkurven sind Funktionen mit einer unabhängigen Variablen und können in bekannter Art untersucht werden.



Def: Partielle Ableitung 1. Ordnung für $z = f(x, y)$

- a) Die erste partielle Ableitung der Funktion $z = f(x, y)$ nach der Variablen x lautet:

$$f_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

Sie gibt die Steigung der Schnittkurve in x -Achsenrichtung an. y ist wie eine Konstante zu betrachten

- b) Die erste partielle Ableitung der Funktion $z = f(x, y)$ nach der Variablen y lautet:

$$f_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Sie gibt die Steigung der Schnittkurve in y -Achsenrichtung an. x ist wie eine Konstante zu betrachten

(12)

Im Gegensatz zur Ableitung einer Funktion mit einer unabhängigen Variablen bezeichnet man die partielle Ableitung einer Funktion mit mehreren unabhängigen Variablen nicht mehr mit f' bzw. $\frac{df}{dx}$, sondern mit $\frac{\partial f}{\partial x}$ bzw. f_x (die Variable nach der abgeleitet wird, steht als "Index")
(∂ = deutsches "D")

Die Bezeichnung f_x bzw. f_y wird von mir favorisiert

c) Def: Partielle Ableitungen bei Funktionen mit n unabhängigen Variablen

Geg.: $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ Funktion mit n unabh. Var.

Die partielle Ableitung nach der i -ten Variablen x_i lautet:

$$f_{x_i} = \frac{\partial z}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\Delta x_i}$$

Beim Differenzieren nach der Variablen x_i werden alle anderen Variablen wie Konstanten behandelt.

Bemerkungen:

Bei einer Funktion mit zwei unabhängigen Variablen gibt es zwei partielle Ableitungen 1. Ordnung

Bei einer Funktion mit n unabhängigen Variablen gibt es n partielle Ableitungen 1. Ordnung

Die partiellen Ableitungen 1. Ordnung sind jeweils wieder Funktionen mit n unabhängigen Variablen.

(13)

Def: Gradient einer Funktion mit n unabhängigen Variablen

Die n partiellen Ableitungen 1. Ordnung werden in einer Zeile oder in einer Spalte zusammengefaßt

$$\begin{pmatrix} f_{x_1} & f_{x_2} & f_{x_3} & \dots & f_{x_n} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} f_{x_1} \\ f_{x_2} \\ \vdots \\ f_{x_n} \end{pmatrix}$$

"Zeilenvektor"
($1 \times n$)-Matrix

Diesen "Zeilenvektor"
bzw. "Spaltenvektor"
bezeichnet man als
"der Gradient von f "

"Spaltenvektor"
($n \times 1$)-Matrix

Schreibweise: $\text{grad } f(x) \quad x = (x_1, \dots, x_n)$

Bem: Existieren an einer Stelle $x = (x_1, \dots, x_n)$ alle partiellen Ableitungen 1. Ordnung, so ist f an der Stelle x differenzierbar.

Bem: Da bei der Berechnung der partiellen Ableitungen 1. Ordnung alle bis auf eine Variable als konstant angesehen werden, wird die Differentiation von Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen auf die Differentiation von Funktionen mit einer unabhängigen Variablen zurückgeführt

(14)

Später werden wir sehen, dass alle Ableitungsregeln übertragen werden können.

Beispiele für die Berechnung partieller Ableitungen 1. Ordnung

1) $z = f(x, y) = e^{x \cdot y}$

Vorgehen bei z_x : $z = e^{x \cdot y}$ "wie eine Konstante"

$$z_x = y \cdot e^{x \cdot y}$$

"wie eine Konstante"

Vorgehen bei z_y : $z = e^{x \cdot y}$

$$z_y = x \cdot e^{x \cdot y}$$

2) $z = f(x, y) = x^n \cdot y^m$

Vorgehen bei z_x : $z = x^n \cdot y^m$

$$z_x = n \cdot x^{n-1} \cdot y^m = n \cdot y^m \cdot x^{n-1}$$

Vorgehen bei z_y : $z = x^n \cdot y^m$

$$z_y = m \cdot y^{m-1} \cdot x^n = m \cdot x^n \cdot y^{m-1}$$

3) $z = f(x, y) = x \cdot \ln y$

$z_x = \ln y$ (es wird nach x abgeleitet, " $\ln y$ " Konstante)

$$z_y = x \cdot \frac{1}{y} = \frac{x}{y} \quad (\text{hier wird } \ln y \text{ abgeleitet})$$

4) $z = f(x, y) = \sin x \cdot \cos y$

$$z_x = \cos x \cdot \cos y \quad (\sin x \text{ wird abgeleitet})$$

$$z_y = -\sin y \cdot \sin x \quad (\cos y \text{ wird abgeleitet})$$

Bitte beachten Sie nochmals:

Bei der Berechnung der partiellen Ableitungen werden die übrigen unabhängigen Variablen, nach denen nicht differenziert wird, wie **Konstanten** behandelt, es handelt sich jedoch nicht um echte Konstanten, sondern nach wie vor veränderliche Variablen.

Die partielle Ableitung ist in jedem Punkt, in dem die Funktion differenzierbar ist, erklärt, und in der Regel selbst eine Funktion der unabhängigen Variablen.

Also bei einer Funktion mit zwei unabhängigen Variablen sind die beiden partiellen Ableitungen erster Ordnung auch Funktionen mit zwei unabhängigen Variablen.

Schauen Sie noch einmal auf die Skizze auf Blatt (11):

Die Steigung der Schnittkurve in Richtung x-Achse (y konstant) kann zwar in einem Punkt gemessen werden, wandelt aber, wenn x verändert wird, entlang der Kurve, d. h. die Kurvengleichung beschreibt die Steigung in jedem Punkt dieser Kurve.

Dazu noch ein weiteres Bp.:

Gegeben: $z = f(x, y) = 2x \cdot y - 3x^2 + \frac{1}{y}$

Gesucht sind die Steigungen in Richtung x-Achse und in Richtung y-Achse im Punkt $(2, 1)$ der Definitionsebene.

Lösung: Gesucht sind zunächst die partiellen Ableitungen erster Ordnung.

$$z_x(x,y) = 2y - 6x \quad ("y \text{ konstant}")$$

$$z_y(x,y) = 2x - \frac{1}{y^2} \quad ("x \text{ konstant}")$$

Die beiden partiellen Ableitungen sind selbst wieder Funktionen von x und y.

Die gesuchten Steigungen für $x=2$ und $y=1$ erhält man durch Einsetzen dieser Werte in die Gleichungen der partiellen Ableitung.

$$z_x(2,1) = 2 \cdot 1 - 6 \cdot 2 = -10$$

$$z_y(2,1) = 2 \cdot 2 - \frac{1}{1^2} = 3$$

$$\text{grad } f(2,1) = \begin{pmatrix} -10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Bem:
Der Gradient kann als Vektor aufgefasst werden

Um schnell und sicher partiell ableiten zu können, muss man die Ableitungsregeln aus dem WS sicher beherrschen. Man muss sich auch ständig vor Augen führen, welches die Variable ist, nach der abgeleitet werden muss und welches die Variablen sind, die für den Moment konstant gehalten werden. Weiterhin muss man darauf achten, ob die Variable, nach der abgeleitet wird, in zwei Faktoren der Funktion auftaucht ($\rightarrow$ Anwenden der Produktregel), ob sie in einer zusammengesetzten

(17)

Funktion erscheint (Kettenregel) oder ob sie
im Zähler oder Nenner einer Funktion erscheint
(Quotientenregel)

Fazit: Ableitungsregeln für Funktionen mit einer
unabhängigen Variablen müssen sicher
beherrscht werden.

Anwenden einer Ableitungsregel, ja oder nein?

Bsp.: 1) $z = f(x, y) = x^2 \cdot y$ keine Produktregel
 $z_x = 2xy$ $z_y = x^2$ notwendig

2) $z = f(x, y) = 4x^2 \cdot \sin x \cdot \cos y$

$$z_x = 8x \cdot \sin x \cdot \cos y + 4x^2 \cdot \cos x \cdot \cos y$$

da x im Faktor $4x^2$ und im Faktor $\sin x \cdot \cos y$
enthalten ist, muss die Produktregel
mit $u = 4x^2$ $u' = 8x$

$$v = \sin x \cdot \cos y \quad v' = \cos x \cdot \cos y$$

angewendet werden

$$z_y = 4x^2 \cdot \sin x \cdot (-\sin y) = -4x^2 \cdot \sin x \cdot \sin y$$

hier braucht man keine Produktregel

3) $z = f(x, y) = y \cdot e^{x^2+y^2}$

$$z_x(x, y) = 2x \cdot y \cdot e^{x^2+y^2} \quad (\text{Kettenregel})$$

$$z_y(x, y) = 1 \cdot e^{x^2+y^2} + y \cdot 2y \cdot e^{x^2+y^2}$$

$$= e^{x^2+y^2} + 2y^2 \cdot e^{x^2+y^2}$$

(Kettenregel und Produktregel)