4) $z = f(x,y) = 3x^2 \cdot y^2 + x^6 + 3y^3$

$$z_x(x,y) = 6x \cdot y^2 + 6x^5$$

$$z_y(x,y) = 6x^2 y + 9y^2$$

keine Produktregel notwendig

5) Jetzt mal eine Variable mehr

$$u(x,y,z) = 2x \cdot e^{yz} + \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$u_x(x,y,z) = 2 \cdot e^{yz} + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 2e^{yz} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$u_y(x,y,z) = 2xze^{yz} + \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 2xze^{yz} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$u_z(x,y,z) = 2xye^{yz} + \frac{2z}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 2xye^{yz} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Übungsaufgabe

$$z = f(x,y) = \ln(x^2+y^2) - e^{2xy} + 3x$$

Bestimmen Sie die Werte des Gradienten für $(0,2)$ und $(1,-6)$

Lösung: $z_x(x,y) = \dfrac{2x}{x^2+y^2} - 2y \cdot e^{2xy} + 3$

$$z_y(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2} - 2xe^{2xy}$$

$$\text{grad}_f(0,2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{grad}_f(1,-6) = \begin{pmatrix} 3.027 \\ -0.3243 \end{pmatrix}$$

Bem zu $\text{grad}_f(1,-6)$ $\quad z_x(1,-6) = \frac{2}{37} + 12 \cdot e^{-12} + 3$

$$z_y(1,-6) = -\frac{12}{37} - 2 \cdot e^{-12}$$

5) $z = f(x,y) = \dfrac{e^x \cdot \sin y}{e^y \cdot \cos x}$

Für die partiellen Ableitungen muss die Quotientenregel angewendet werden

$$z_x(x,y) = \frac{e^x \cdot \sin y \cdot e^y \cdot \cos x + e^x \cdot \sin y \cdot e^y \cdot \sin x}{(e^y \cdot \cos x)^2}$$

$u = e^x \cdot \sin y$
$u_x = e^x \sin y$
$v = e^y \cos x$
$v_x = -e^y \sin x$

$$z_y(x,y) = \frac{e^x \cdot \cos y \cdot e^y \cdot \cos x - e^x \sin y e^y \cos x}{(e^y \cdot \cos x)^2}$$

$u_y = e^x \cos y$
$v_y = e^y \cos x$

Auf die weitere Zusammenfassung wird hier verzichtet, da es nur um die korrekte Anwendung der Quotientenregel ging.

6) $z = f(x,y) = \sin(x \cdot y) + y \cdot e^{-x^2}$

$$\left.\begin{aligned} z_x(x,y) &= y \cdot \cos(x \cdot y) + y \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) \\ &= y \cdot \cos(x \cdot y) - 2xy \cdot e^{-x^2} \\ z_y(x,y) &= x \cdot \cos(x \cdot y) + e^{-x^2} \end{aligned}\right\} \text{Kettenregel}$$

Die Beispiele haben Ihnen die verschiedenen Möglichkeiten gezeigt, bei den partiellen Ableitungen auf die Ihnen bekannten Ableitungsregeln (Produktregel, Kettenregel, Quotientenregel) zurückzugreifen, da beim partiellen Ableiten immer alle bis auf eine Variable (die, nach der abgeleitet wird) konstant sind und somit das Ableiten auf das Ableiten einer Funktion mit einer Variablen zurückgeführt wird.

Bemerkung zum Gradienten einer Funktion mit mehreren unabhängigen Variablen:

Fasst man den Gradienten als Vektor auf, so kann dieser Vektor für variable Werte $(x_1, \dots x_n)$ als "Vektorfunktion" aufgefasst werden. Betrachtet man diesen "Gradientenvektor" angeheftet am Punkt P mit $P(x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, \dots x_n))$, so "zeigt" der Vektor in die Richtung der maximalen Zuwachsrate der Funktion f, der Betrag vom Vektor ist dann die maximale Zuwachsrate.
Der Gradient kann also jedem Punkt zugeordnet werden (gut vorstellbar für $n=2$) und liefert, für verschiedene Punkte aufgezeichnet, ein sogenanntes Skalarfeld. Am Beispiel einer Höhenkarte einer Landschaft, liefert dieses Skalarfeld einen Überblick über die Richtungen der steilsten Anstiege.
Das führt hier schon weit in das Gebiet der Vektoranalysis hinein.

Partielle Ableitungen höherer Ordnung bei Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen

Bei Funktionen mit einer unabhängigen Variablen $y = f(x)$ konnte die Ableitung $y' = f'(x)$ wieder abgeleitet werden: $y'' = f''(x)$. Voraussetzung war, dass die Funktion n-mal stetig differenzierbar war.
Dies kann auf die partiellen Ableitungen übertragen werden.

Frage: Welche Besonderheiten fallen Ihnen ein, wenn man die "zweite" Ableitung z.B. bei einer Funktion mit zwei unabhängigen Variablen $z = f(x,y)$ berechnen möchte?

Partielle Ableitungen 1. Ordnung von $z = f(x,y)$:

z_x $\quad$ z_y $\qquad$ 2 Stück

z_x, z_y können jeweils nach x bzw. y abgeleitet werden

z_{xx} $\quad$ z_{xy} $\quad$ z_{yy} $\quad$ z_{yx} $\qquad$ 4 Stück

Die partiellen Ableitungen 1. Ordnung sind wiederum eine Funktion mit (hier) zwei Variablen, diese können wieder partiell nach der einen oder anderen Variablen abgeleitet werden.

z_{xx}
z_{yy} zweimal nach derselben Variablen abgeleitet:
direkte Ableitungen

Bem.
z_{xx}
immer gleich groß

z_{xy}
z_{yx} gemischte Ableitungen

Frage: Geg.: $z = f(x,y)$
Wieviele partielle Ableitungen 3. Ordnung gibt es?

Antwort: die 4 partiellen Ableitungen 2. Ordnung können jeweils nach x bzw. y abgeleitet werden, also 8 partielle Ableitungen dritter Ordnung.

Frage: Geg.: $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ Funktion mit n unabhängigen Variablen

Wie viele partielle Ableitungen 2. Ordnung gibt es?
Wie viele partielle Ableitungen m-ter Ordn. gibt es?

Antwort: Es gibt n^2 partielle Ableitungen 2. Ordnung
Es gibt n^m partielle Ableitungen m-ter Ordnung.

Def: Geg. $z = f(x,y)$
Dann heißen

$$f_{xx}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(f_x(x,y)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}$$

und $$f_{yy}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}\left(f_y(x,y)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}$$

die direkten Ableitungen 2. Ordnung

$$f_{xy}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}\left(f_x(x,y)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}$$

und $$f_{yx}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(f_y(x,y)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}$$

die gemischten Ableitungen 2. Ordnung

Es wird vereinbart, dass wir die "Indexschreibweise" f_{xx}, f_{xy}, etc. verwenden und nicht die $\frac{\partial f}{\partial x}$-Schreibweise.

Die Definition für Funktionen mit n unabhängigen Variablen lautet entsprechend.

Schreibweise für partielle Ableitungen höherer Ordnung – Beispiel

$$f_{xyz}(x,y,z) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$$

partielle Ableitung dritter Ordnung
Reihenfolge "von links nach rechts",
also nach x, nach y und nach z

Bei der Berechnung von partiellen Ableitungen höherer Ordnung erleichtert1 keinen folgender Satz, der nicht bewiesen wird, erheblich die Rechnung:

Satz von Schwarz

Ist eine Funktion f mit n unabhängigen Veränderlichen m-mal stetig differenzierbar, so sind die gemischten partiellen Ableitungen m-ter Ordnung unabhängig von der Reihenfolge des Differenzierens alle gleich.

Bp.: $z = f(x,y) = x^2 \cdot y + 2x^5 \cdot y$

$z_x(x,y) = 2xy + 10x^4y$ $\qquad z_{xx}(x,y) = 2y + 40x^3y$

$z_y(x,y) = x^2 + 2x^5$ $\qquad z_{yy}(x,y) = 0$

$z_{xy}(x,y) = 2x + 10x^4$

$z_{yx}(x,y) = 2x + 10x^4$

Die Darstellung der n partiellen Ableitungen 1. Ordnung erfolgte zusammengefasst in einem Vektor, dem Gradienten der Funktion.
Die n^2 partiellen Ableitungen 2. Ordnung werden in einer Matrix zusammengefasst:

Def: Ist $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ zweimal partiell differenzierbar nach $x_1, \dots, x_n$, so heißt die Matrix $H(x)$ mit $(x = \underbrace{(x_1, \dots, x_n)}_{n\text{-Tupel}})$

$$H(x) = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(x) & \cdots & f_{x_1 x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_n x_1}(x) & \cdots & f_{x_n x_n}(x) \end{pmatrix}$$

die **Hesse'sche Matrix** von f an der Stelle $x = (x_1, \dots x_n)$

andere Bezeichnungen:
Jacobi'sche Matrix
Funktionalmatrix

Frage: Welche Eigenschaft hat $H(x)$, wenn Sie an den Satz von Schwarz denken?

Antwort: $H(x)$ ist symmetrisch

Beispiele:

1) $z = f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^2 \cdot x_3 + x_3$

Aufstellen der Hesse-Matrix

$f_{x_1}(x_1,x_2,x_3) = 3x_1^2$

$f_{x_2}(x_1,x_2,x_3) = 2x_2x_3$ $\qquad \text{grad}_f = \begin{pmatrix} 3x_1^2 \\ 2x_2x_3 \\ x_2^2+1 \end{pmatrix}$

$f_{x_3}(x_1,x_2,x_3) = x_2^2 + 1$

Partielle Ableitungen 2. Ordnung

$f_{x_1x_1} = 6x_1 \qquad f_{x_1x_2} = 0 \qquad f_{x_1x_3} = 0$

$f_{x_2x_1} = 0 \qquad f_{x_2x_2} = 2x_3 \qquad f_{x_2x_3} = 2x_2$

$f_{x_3x_1} = 0 \qquad f_{x_3x_2} = 2x_2 \qquad f_{x_3x_3} = 0$

$$H(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} 6x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2x_3 & 2x_2 \\ 0 & 2x_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Soll der Wert des Gradienten bzw. der Wert der Hesse-Matrix an einer ganz bestimmten Stelle berechnen, so setzt man diese Werte in grad_f bzw. $H(x)$ ein. Für $x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = -1$ ergibt sich

$$\text{grad}_f(1,-1,-1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad H(1,-1,-1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Bem: $H(1,-1,-1)$ symmetrisch (Satz von Schwarz)

2) $f(x,y) = 3x^5y^4 + 2x^3y^2 + x^2 + 3$

$f_x(x,y) = 15x^4y^4 + 6x^2y^2 + 2x$

$f_y(x,y) = 12x^5y^3 + 4x^3y$

$\operatorname{grad}_f = \begin{pmatrix} 15x^4y^4 + 6x^2y^2 + 2x \\ 12x^5y^3 + 4x^3y \end{pmatrix}$

$f_{xx}(x,y) = 60x^3y^4 + 12xy^2 + 2$

$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 60x^4y^3 + 12x^2y$

$f_{yy}(x,y) = 36x^5y^2 + 4x^3$

$$H(x) = \begin{pmatrix} 60x^3y^4 + 12xy^2 + 2 & 60x^4y^3 + 12x^2y \\ 60x^4y^3 + 12x^2y & 36x^5y^2 + 4x^3 \end{pmatrix}$$

3) $f(x,y) = \sin(x \cdot y) + y \cdot e^{-x^2}$

$f_x(x,y) = y \cdot \cos(x \cdot y) - 2xy \cdot e^{-x^2}$

$f_y(x,y) = x \cdot \cos(x \cdot y) + e^{-x^2}$

$\operatorname{grad}_f = \begin{pmatrix} y \cdot \cos(x \cdot y) - 2xye^{-x^2} \\ x \cdot \cos(x \cdot y) + e^{-x^2} \end{pmatrix}$

$f_{xx}(x,y) = -y^2 \sin(x \cdot y) - 2ye^{-x^2} + 4x^2ye^{-x^2}$ (Produktregel für den zweiten Summanden)

$f_{yy}(x,y) = -x^2\cos(xy)$

$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \cos(xy) - xy\sin(xy) - 2xe^{-x^2}$

Auf die Darstellung dieser Ableitungen 2. Ordnung in einer Hesse-Matrix wird hier verzichtet.

Interpretation der partiellen Ableitungen 2. Ordnung bei Funktionen mit 2 unabhängigen Variablen

f_x : Steigung der Schnittkurve in x-Achsenrichtung

f_y : Steigung der Schnittkurve in y-Achsenrichtung

f_{xx} : Krümmung der Schnittkurve in x-Achsenrichtung

f_{yy} : Krümmung der Schnittkurve in y-Achsenrichtung