Extremwerte mit Nebenbedingungen

Die Bestimmung von Extremwerten von Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen wird oft erst dann sinnvoll, wenn noch zusätzliche Bedingungen für die Variablen gelten müssen, die sogenannten Nebenbedingungen (Einschränkungen, Restriktionen)

In der Praxis handelt es sich dabei meist um Optimierungsaufgaben, durch die Nebenbedingungen können z.B. Kapazitätsbeschränkungen, vorhandene finanzielle Mittel etc. ausgedrückt werden. So macht in einem Unternehmen Kostenminimierung nur Sinn, wenn dennoch etwas produziert wird, also immer in einem gewissen Rahmen.

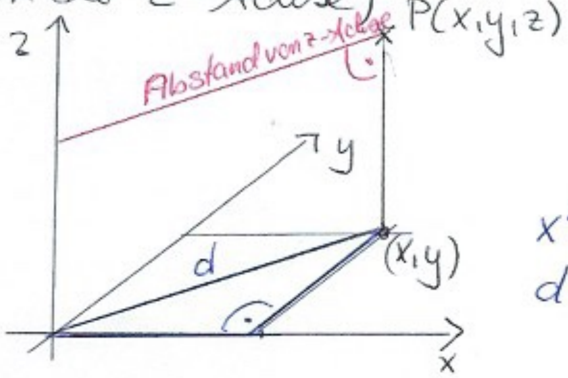
Beispiel für eine geometrische Problemstellung

Ein Punkt bewege sich auf der Ebene mit der Gleichung $x+y+z=0$, der Abstand des Punktes vom Ursprung des dreidimensionalen Koordinatensystems sei 1. (Er bewegt sich auf der Kugel um O mit $r=1$)

Wenn man sich fragt: "Welches ist der kleinst- und welches ist der größtmögliche Abstand von der z-Achse?", dann liegt mathematisch gesehen, eine Extremwertaufgabe mit zwei Nebenbedingungen vor:

Zielfunktion : $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$

(Abstand eines 3D Punktes von der z-Achse) — Abstandsfunktion



$x^2+y^2=d^2$

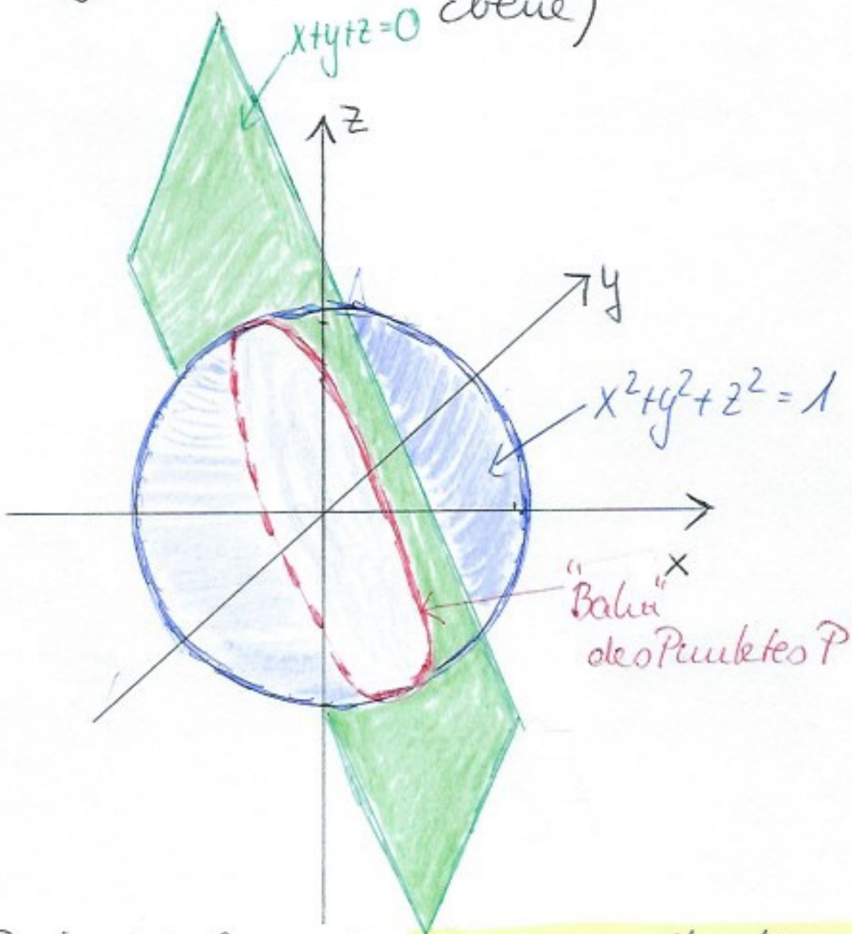
$d=\sqrt{x^2+y^2}$

Nebenbedingungen

1) $x^2+y^2+z^2=1$ (der Punkt hat bei seiner Bewegung vom Ursprung den Abstand 1: er bewegt sich auf der Kugeloberfläche mit $r=1$)

2) $x+y+z=0$ (der Punkt liegt auf der Ebene)

Skizze:



Dies ist ein Beispiel für eine Extremwertbestimmung mit zwei Nebenbedingungen.

Wie man eine solche Aufgabe löst, werden wir etwas später besprechen, zunächst benötigt man einige grundlegende Informationen für Lösungen von Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen allgemein.

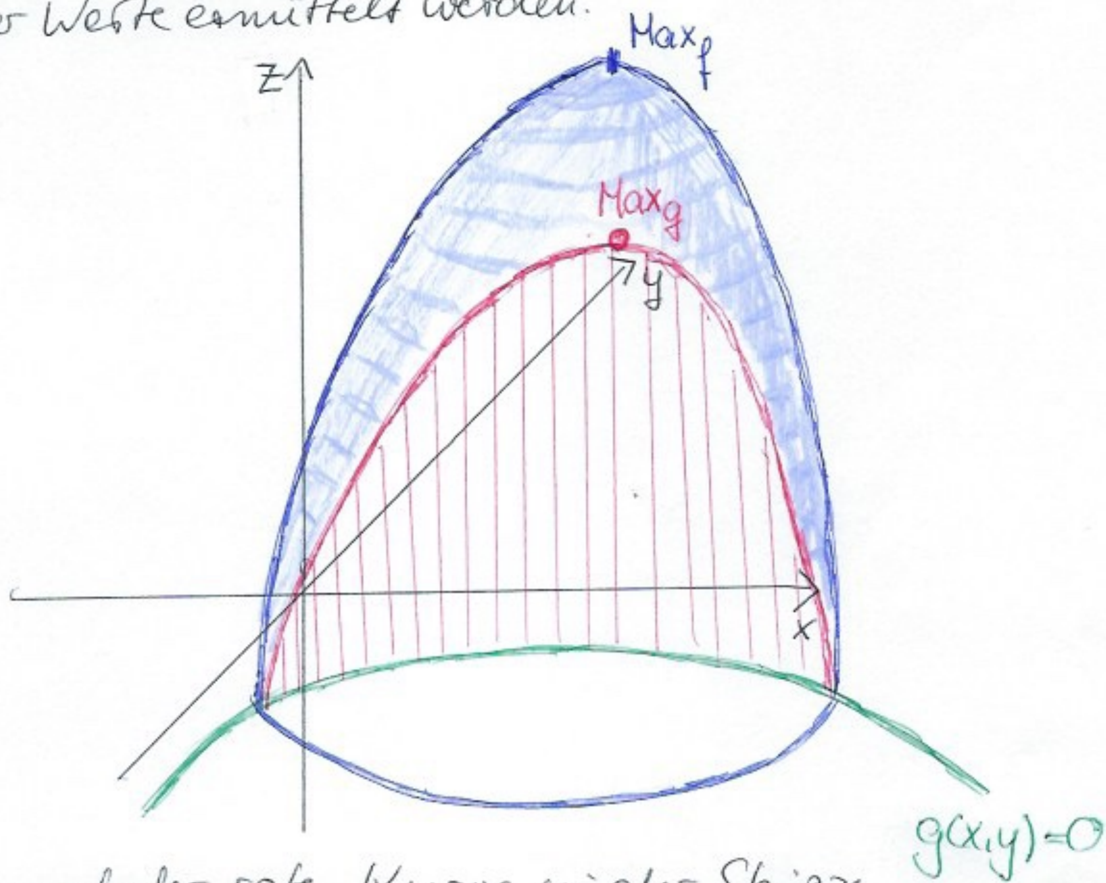
Genauer: hier liegt eine Funktion mit drei unabhängigen Variablen vor mit zwei Nebenbedingungen.

Veranschaulichung für eine Funktion $z = f(x,y)$ mit einer Nebenbedingung $g(x,y) = 0$

$f(x,y)$ heißt die Zielfunktion
$g(x,y)$ heißt die Nebenbedingung oder Restriktion

$g(x,y) = 0$ ist als eine Vorschrift zu sehen, aus dem gesamten Definitionsbereich der Funktion ($\subseteq \mathbb{R}^2$) ganz bestimmte (x,y)-Werte auszuwählen, für die dann die Funktionswerte berechnet und der Extremwert dieser Werte ermittelt werden.

Skizze:



Die Werte auf der roten Kurve in der Skizze bezeichnet man als Entscheidungsraum.

Ohne Nebenbedingung besteht der Entscheidungsraum aus der Menge aller zum gesamten Definitionsbereich gehörenden Funktionswerte (blaue Fläche)

Es gibt zwei verschiedene Verfahren, eine solche Extremwertaufgabe mit Nebenbedingungen zu lösen:

1) Lösung durch Variablensubstitution

Dies ist ein Verfahren, das man auf Funktionen mit zwei unabhängigen Veränderlichen und einer Nebenbedingung anwenden kann, wenn die Nebenbedingung nach einer der beiden Variablen aufgelöst werden kann. Rückführung auf eine Funktion mit 1 Variablen.

Dieses Verfahren ist Ihnen nicht unbekannt, im Eingangsbeispiel (BdH①) wurde als Beispiel für eine Funktion mit zwei unabhängigen Variablen das Volumen eines Zylinders mit $V(r,h) = \pi \cdot r^2 \cdot h$ genannt. Als häufig zitiertes Beispiel einer Extremwertaufgabe kennen Sie das "Dosenproblem", im Prinzip schon ein Extremwertproblem (minimale Oberfläche) unter einer Nebenbedingung (Volumen 1 Liter)...

Beispiel

$$z = f(x,y) = -x^2 - \frac{1}{2}y^2 + 4 \qquad D = \mathbb{R}_+^2$$

(der Definitionsbereich ist der 1. Quadrant der (x-y)-Ebene)

Nebenbedingung:

$$g(x,y) = 2 - 2x - y = 0$$

Die Nebenbedingung lässt sich nach der Variablen y auflösen: $y = 2 - 2x$ dies ist eine Gerade in der (x-y)-Ebene.

Eingesetzt in $z = f(x,y)$:

$$\begin{aligned} z &= -x^2 - \frac{1}{2}(2-2x)^2 + 4 \\ &= -x^2 - \frac{1}{2}(4 - 8x + 4x^2) + 4 \\ &= -x^2 - 2 + 4x - 2x^2 + 4 \\ &= -3x^2 + 4x + 2 \qquad \text{(Funktion mit 1 unabh. Variablen)} \end{aligned}$$

$$z'(x) = -6x + 4 = 0 \quad \text{(notwendige Bedingung)}$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

$z''(x) = -6$

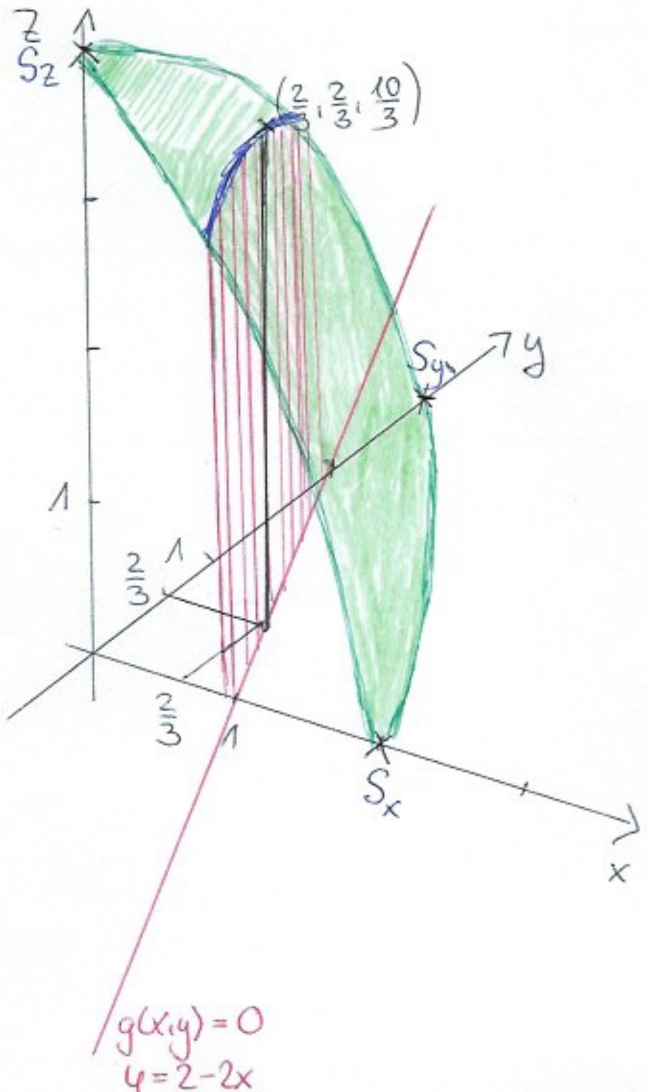
$z''(\frac{2}{3}) = -6 < 0 \Rightarrow$ lokales Maximum für $x = \frac{2}{3}$

und $y = 2 - 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

Das Maximum liegt bei $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, f(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})\right)$

also $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{10}{3}\right)$

Skizze:



Diese Lösungsmethode der Variablensubstitution ist nur äußerst eingeschränkt einsetzbar.
Im Folgenden soll eine Methode vorgestellt werden, die für Funktionen mit n unabhängigen Variablen und k Nebenbedingungen angewendet werden kann.
Zunächst wird diese Methode für eine Funktion mit 2 unabh. Variablen und einer Nebenbedingung vorgestellt.

2) Die Methode von Lagrange

Multiplikatorregel von Lagrange

Lagrange (1736 - 1813) wurde schon mit 19 Jahren als Professor für Mathematik in seine Heimatstadt Turin berufen. War danach in Berlin (Nachfolger von Leonhard Euler) und in Paris. Er lieferte wichtige Beiträge zur Infinitesimalrechnung. Aus dem WS kennen Sie in der Taylor-Formel das Restglied von Lagrange.

Prinzip von Lagrange am Bsp. $z = f(x,y)$:

Geg: $z = f(x,y)$ und die Nebenbedingung $g(x,y) = 0$

Die Extremwerte der Funktion $z = f(x,y)$ unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$ liegen an den Stellen, an denen die Funktion

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda \cdot g(x,y)$$

ihre Extremwerte annimmt.

λ heißt der Lagrange-Multiplikator

Da $g(x,y) = 0$, sind die Funktionswerte von L und f an der Extremstelle gleich, sowie an allen anderen Punkten, die die Nebenbedingung erfüllen.

Durch die Methode von Lagrange wird das Problem der Extremwertbestimmung unter Nebenbedingungen auf die uneingeschränkte Extremwertbestimmung zurückgeführt.

Die neue Funktion, die Lagrange-Funktion L besitzt eine Veränderliche mehr, nämlich den Lagrange-Multiplikator λ, der die Funktion und die Nebenbedingung verknüpft.

Aus einer Funktion mit zwei unabhängigen Veränderlichen x und y wird eine Funktion mit 3 Variablen x, y und λ.

Vorgehen:

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda \cdot g(x,y)$$

Man berechnet sämtliche partielle Ableitungen 1. Ordnung und setzt diese gleich Null (notwendige Bed.)

$$L_x(x,y,\lambda) = f_x(x,y) + \lambda g_x(x,y) = 0$$
$$L_y(x,y,\lambda) = f_y(x,y) + \lambda g_y(x,y) = 0$$
$$L_\lambda(x,y,\lambda) = g(x,y) = 0$$

Die partielle Ableitung nach λ (=0 gesetzt) liefert gerade die Nebenbedingung, d.h. man kann bei der Auswertung der notwendigen Bedingungen bei der partiellen Ableitung nach dem Lagrange-Multiplikator direkt die Nebenbedingung hinschreiben.

Wie bei der Extremwertbestimmung ohne Nebenbedingungen (Blatt 40) berechnet man über die notwendigen Bedingungen die Kandidaten für mögliche Extremwerte. Um über die Art eines Extremwertes zu entscheiden, müssen noch hinreichende Bedingungen formuliert werden. Dies erfolgt erst nach einigen Beispielen, also später.

Die Methode von Lagrange erweist sich als nützlich vor allem dann, wenn die Nebenbedingungen komplizierter sind, wenn man mehr als zwei unabhängige Variablen in der Funktion hat und wenn mehr als eine Nebenbedingung erfüllt werden muss. In all diesen Fällen ist die Variablensubstitution ungeeignet.

In den folgenden Beispielen soll das Auswerten der notwendigen Bedingungen geübt werden.

Beispiele

1) $z = f(x,y) = -x^2 - \frac{1}{2}y^2 + 4 \quad D = \mathbb{R}_+^2$

$$g(x,y) = 2 - 2x - y = 0$$

$$L(x,y,\lambda) = -x^2 - \tfrac{1}{2}y^2 + 4 + \lambda(2 - 2x - y)$$

$$L_x(x,y,\lambda) = -2x - 2\lambda = 0 \quad \mathrm{I}$$

$$L_y(x,y,\lambda) = -y - \lambda = 0 \quad \mathrm{II}$$

$$L_\lambda(x,y,\lambda) = 2 - 2x - y = 0 \quad \mathrm{III} \text{ (Nebenbedingung)}$$

Lösen des Gleichungssystems:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Aus I}: -2x = 2\lambda \Rightarrow \lambda = -x \\ \text{Aus II}: \lambda = -y \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{*}{x = y}$$

$*$ in III: $2 - 2x - x = 2 - 3x = 0$

$$\Leftrightarrow 2 = 3x$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \underset{*}{\Rightarrow} y = \frac{2}{3}$$

Kandidat: $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

Auf Blatt 49 haben wir genau dieses Beispiel mit Hilfe der Variablensubstitution gelöst und gesehen, dass es sich um ein lokales Maximum handelt.

2) Dosenproblem

Dieses Beispiel kennen Sie bereits aus dem WS, dort haben wir im Prinzip eine Funktion mit zwei unabhängigen Variablen mit Hilfe der Variablensubstitution zur Berechnung eines Extremwertes verwendet.

Formulierung des Problems:

In einer Fabrik werden oben offene Dosen mit dem Radius r und der Höhe h hergestellt. Wie müssen r und h gewählt werden, damit Dosen mit Volumen 1 Liter minimale Oberfläche besitzen, d.h. der Materialverbrauch soll minimal sein.

Mathematische Formulierung:

Zielfunktion: $f(r,h) = \underbrace{\pi \cdot r^2}_{\text{Boden}} + \underbrace{2\pi r h}_{\text{Mantel}}$

"oben offen"

Nebenbedingung: $g(r,h) = \pi \cdot r^2 \cdot h - 1000 = 0$

$r, h \geq 0$ $1 \text{ Liter} = 1000\,cm^3$

Lösung mit der Methode von Lagrange:

$$L(r,h,\lambda) = \pi \cdot r^2 + 2\pi r h + \lambda(\pi r^2 \cdot h - 1000)$$

notwendige Bedingungen aufstellen und auswerten:

$$L_r(r,h,\lambda) = 2\pi r + 2\pi h + 2\pi r \lambda h = 0 \quad \mathrm{I}$$

$$L_h(r,h,\lambda) = 2\pi r + \lambda \pi r^2 = 0 \quad \mathrm{II}$$

$$L_\lambda(r,h,\lambda) = \pi r^2 h - 1000 = 0 \quad \mathrm{III}$$

(genau die Nebenbedingung!)

Aus II: $2\pi r = -\lambda \pi r^2 \Leftrightarrow -\lambda = \frac{2\pi r}{\pi r^2} \Leftrightarrow \underbrace{\lambda = -\frac{2}{r}}_{*}$

Aus I: $2\pi r + h(2\pi + 2\lambda \pi r) = 0$

mit $*$: $2\pi r + h(2\pi - 2 \cdot \frac{2}{r} \cdot \pi \cdot r) = 0$

$\Leftrightarrow 2\pi r + h(-2\pi) = 0$

$\Leftrightarrow 2\pi r = 2\pi h \Rightarrow \underbrace{h = r}_{**}$

Aus III mit ∗∗: $\pi r^2 \cdot r - 1000 = 0$

$$\Leftrightarrow \pi r^3 = 1000$$

$$\Leftrightarrow r^3 = \frac{1000}{\pi}$$

$$\Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}} = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$$

Damit: $h = r = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$

Den Nachweis, dass es sich um Maße handelt, die zu einer minimalen Oberfläche führen, erbringen wir an dieser Stelle noch nicht.

Die Methode von Lagrange bei Funktionen mit n unabhängigen Variablen und k Nebenbedingungen

Funktionen mit n unabhängigen Variablen und k Nebenbedingungen, können nicht mehr mit Hilfe der Variablensubstitution gerechnet werden. Hier ist die Methode von Lagrange der elegantere und übersichtlichere Weg.

Geg.: $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ Zielfunktion mit n unabhängigen Variablen

$z_j = g_j(x_1, \ldots, x_n) = 0$ k Nebenbedingungen $(j = 1, \ldots, k)$

Sei $x = (x_1, \ldots, x_n)$

$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$

Die Lagrange-Funktion lautet:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j g_j(x)$$

Berechnung der Kandidaten für Extremwerte durch Auswerten der notwendigen Bedingungen:

Die partiellen Ableitungen dieser Funktion

$$L_{x_i} \qquad (i=1,\dots,n)$$

$$L_{\lambda_j} \qquad (j=1,\dots,k)$$

also insgesamt $n+k$ Stück, erfüllen die Gleichungen $L_{x_i}(x,\lambda)=0$ und $L_{\lambda_j}(x,\lambda)=0$

Man hat also ein Gleichungssystem mit $n+k$ Unbekannten, dessen Lösungen

$$x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$$

Kandidaten für Minima oder Maxima der Funktion unter den k Nebenbedingungen darstellen können.

$$L_{x_i}(x,\lambda) = f_{x_i}(x) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \, g_{j x_i}(x) = 0 \quad i=1,\dots,n$$

$$L_{\lambda_j}(x,\lambda) = g_j(x) = 0 \quad j=1,\dots,k$$

<u>Bem.:</u> die Ableitungen nach λ_j $(j=1,\dots,k)$ liefern die n Nebenbedingungen.

In der Regel geht man davon aus, dass der Wert, den man über die Auswertung der notwendigen Bedingungen erhält, auch einen Extremwert liefert.

Im Folgenden sollen jedoch einmal die hinreichenden Bedingungen für die Existenz von Minima und Maxima für eine Funktion mit n Variablen und einer Nebenbedingung formuliert werden.

geg: $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ Funktion mit n unabhängigen Variablen

f besitze stetige partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung.

$g(x_1, \dots x_n) = 0$ Nebenbedingung

$x = (x_1, \dots\dots x_n)$

$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda g(x)$ Lagrange-Funktion

$x^* = (x_1^*, \dots\dots x_n^*)$

Es gelte $L_{x_1}(x^*) = L_{x_2}(x^*) = \dots\dots = L_{x_n}(x^*) = 0$

x^* ist also ein Kandidat für einen Extremwert.

1) x^* ist lokales Maximum, falls

$G_2 > 0$, $G_3 < 0$, $\dots\dots G_n \begin{cases} > 0 & n \text{ gerade} \\ < 0 & n \text{ ungerade} \end{cases}$

2) x^* ist lokales Minimum, falls

$G_2 < 0$, $G_3 < 0$, $\dots\dots G_n < 0$ für alle n

mit
$$G_n = \begin{vmatrix} L_{x_1x_1} & L_{x_1x_2} & \dots & L_{x_1x_n} & \overset{L_{\lambda x_1}}{g_{x_1}} \\ L_{x_2x_1} & L_{x_2x_2} & \dots & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ L_{x_nx_1} & & & & \overset{L_{\lambda x_n}}{g_{x_n}} \\ \underset{L_{\lambda x_1}}{g_{x_1}} & \dots & & & 0 \end{vmatrix}$$

$\vdots$

$$G_2 = \begin{vmatrix} L_{x_1x_1} & L_{x_1x_2} & g_{x_1} \\ L_{x_2x_1} & L_{x_2x_2} & g_{x_2} \\ g_{x_1} & g_{x_2} & 0 \end{vmatrix}$$