

Zusammenfassung der Themen des Sommersemesters

I) Integralrechnung

Wichtige Begriffe:

Das bestimmte Integral $\int_a^b f(x) dx$

Das unbestimmte Integral $\int f(x) dx = F(x) + C$,
 $C \in \mathbb{R}$

Folgerung aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Integrationsregeln für geschlossen lösbare Integrale:

1) Partielle Integration

$$\int uv' dx = uv - \int u'v dx$$

↑
"partielles"
Integral

Bp: $\int \frac{x}{|x-2|} dx$

$$= \int x (x-2)^{-\frac{1}{2}} dx$$

Wähle: $u(x) = x$ $u'(x) = 1$
 $v'(x) = (x-2)^{-\frac{1}{2}}$ $v(x) = 2(x-2)^{\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x}_{u} \underbrace{(x-2)^{-\frac{1}{2}}}_{v'} dx &= \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{2 \cdot (x-2)^{\frac{1}{2}}}_{v} - \int \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{2(x-2)^{\frac{1}{2}}}_{v} dx \\ &= 2x(x-2)^{\frac{1}{2}} - 2 \cdot \frac{2}{3} (x-2)^{\frac{3}{2}} \\ &= 2x\sqrt{x-2} - \frac{4}{3} \sqrt{(x-2)^3} + C, \\ &\quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

2) Integration durch Substitution

Bp.: $\int \frac{x^2+1}{x^3+3x} dx$

Substituiere:
 $z = x^3 + 3x$

$$\begin{aligned} z' &= \frac{dz}{dx} = 3x^2 + 3 \\ &= 3(x^2 + 1) \end{aligned}$$

$$dz = 3(x^2 + 1) \cdot dx$$

$$\frac{1}{3} \int \frac{1}{z} \cdot \underbrace{3(x^2+1) dx}_{\text{"Korrekturfaktor"}}$$

$$= \frac{1}{3} \ln|z| \Rightarrow \frac{1}{3} \ln|x^3+3x| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Rücksubstitution

3) Berechnung von Rotationsvolumina

Bp.: der Graph von $f(x) = x^2 + 1$ rotiere um Bereich $[-1; 2]$ um die x -Achse.

Beschreiben Sie zunächst die Form des Körpers, der dabei entsteht und berechnen Sie dann das Volumen.

Form: eine Vase, die um 90° gedreht wurde

Volumenformel: $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$

Hier: $V = \pi \int_{-1}^2 (x^2 + 1)^2 dx = \pi \int_{-1}^2 (x^4 + 2x^2 + 1) dx$

$$V = \pi \left[\frac{1}{5} x^5 + \frac{2}{3} x^3 + x \right]_{-1}^2$$

$$= \pi \left[\frac{1}{5} \cdot 2^5 + \frac{2}{3} 2^3 + 2 - \left(\frac{1}{5} (-1)^5 + \frac{2}{3} (-1)^3 + (-1) \right) \right]$$

$$= \pi \left[\frac{32}{5} + \frac{16}{3} + 2 + \frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1 \right]$$

$$= \pi \left[\frac{48}{5} + \frac{18}{3} \right] = \frac{78}{5} \pi \text{ VE}$$

Einschub: Hyperbelfunktionen

Bei vielen technischen Fragestellungen treten Kombinationen der Exponentialfunktionen e^x und e^{-x} auf, die als Hyperbelfunktionen bekannt sind (hyperbolische Funktionen). Falls diese Funktionen blumen einmal in einer Klausuraufgabe begegnen sollten, hier einige wichtige Eigenschaften:

Hyperbelsinus: $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Hyperbelcosinus: $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

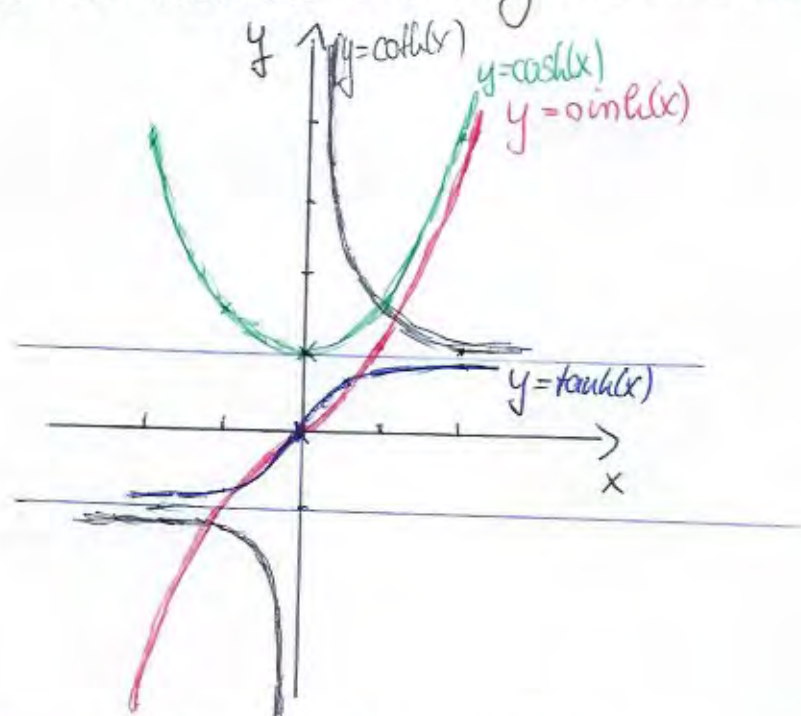
Hyperbeltangens: $\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Hyperbelcotangens: $\coth(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

Die Funktionswerte berechnen Sie mit Hilfe des Taschenrechners, die meisten haben die Tasten $\sinh$, $\cosh$, etc.

Die Berechnung Sinus hyperbolicus etc. ist eine Folge der Funktionseigenschaften, die sehr ähnlich zu denen der trigonometrischen Funktionen sind.

Graphen:



Eigenschaften der Hyperbelfunktionen

	$y = \sinh(x)$	$y = \cosh(x)$	$y = \tanh(x)$	$y = \coth(x)$
D_f	$-\infty < x < \infty$	$-\infty < x < \infty$	$-\infty < x < \infty$	$ x > 0$
W_f	$-\infty < y < \infty$	$1 \leq y < \infty$	$-1 < y < 1$	$ y > 1$
Symm.	ungerade	gerade	ungerade	ungerade
NST	$x = 0$	keine	$x = 0$	keine
Monotonie	streng wachsend	—	streng wachsend	—
Pole	—	—	—	$x = 0$
Extremw.	—	$x = 0$ (Min)	—	—

Es gelten folgende Beziehungen:

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \quad \coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{1}{\tanh(x)}$$

Bp. für eine Hyperbelfunktion: Eine an zwei gleich hohen Punkten aufgehängte Seilwaage wird durch die Schwerkraft in die

geometrische Form einer sogenannten Kettenlinie gebracht, welche durch die Gleichung

$$y = c \cdot \cosh(ax) \quad a, c \text{ Parameter}$$

beschrieben wird.

Für Sie von Bedeutung sind die Ableitungen der Hyperbelfunktionen (eventuell mal bei Integrationsaufgaben zu verwenden)

$$y = \sinh(x) \quad y' = \cosh(x)$$

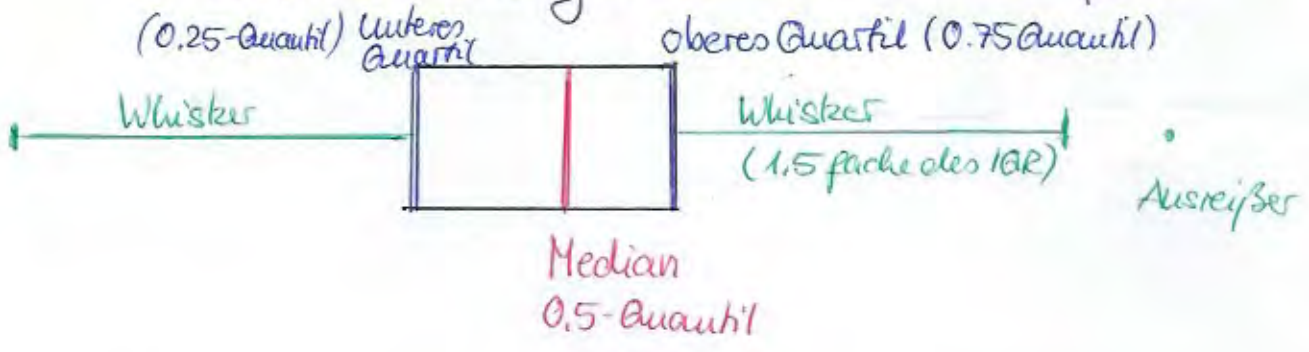
$$y = \cosh(x) \quad y' = \sinh(x)$$

$$y = \tanh(x) \quad y' = \frac{1}{\cosh^2(x)}$$

$$y = \coth(x) \quad y' = -\frac{1}{\sinh^2(x)}$$

II Wahrscheinlichkeitsrechnung / Statistik

1) Visualisierung von Daten : Boxplot



2) Kombinatorische Grundlagen

$\binom{n}{k}$ Binomialkoeffizient $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

(Taste $[nCr]$ auf dem Taschenrechner)

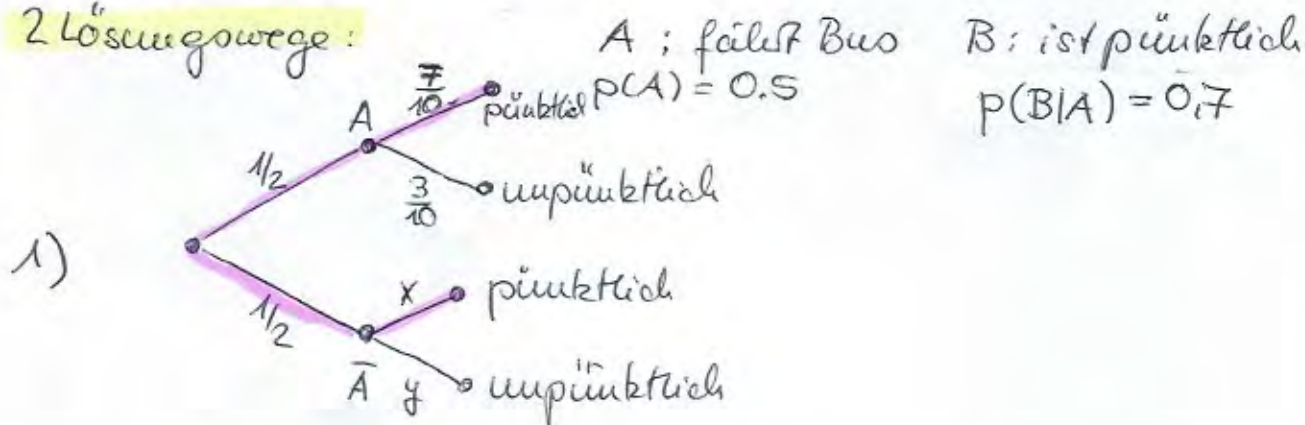
Bp: $\binom{49}{6} = \frac{49!}{6!(49-6)!} = 13983816$ Anzahl der Möglichkeiten beim Lotto "6 aus 49" 6 Kugeln auszuwählen.

3) Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)}$$

Bp: Student S fährt 50% der Semestertage mit dem Bus
 In 70% dieser Fälle kommt er pünktlich an die TH
 Durchschnittlich kommt er aber nur an 60% der Tage
 pünktlich an. Heute ist er pünktlich. Mit welcher
 Wahrscheinlichkeit hat er den Bus benutzt?

2 Lösungswege:



$P(\text{pünktlich}) : \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{10} + \frac{1}{2} \cdot x = 0.6$
 (Pfadwahrscheinlichkeiten addieren) $\Rightarrow \frac{1}{2}x = \frac{6}{10} - \frac{7}{20} \Rightarrow x = \left(\frac{12-7}{20}\right) \cdot 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

Das Ereignis "pünktlich" setzt sich zusammen aus "pünktlich mit Bus" und "pünktlich ohne Bus":
 $\frac{7}{20} + \frac{1}{4} \hat{=} 100\% \quad \frac{12}{20} \hat{=} 100\% \quad \frac{7}{20} \hat{=} x\% \Rightarrow x = 58.33\%$
 $\frac{7}{20} + \frac{5}{20} \hat{=} 100\%$

2) $P(A) = 0.5$ $P(B) = 0.6$

Gesucht $P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)} = \frac{0.5 \cdot 0.7}{0.6}$
 $= 0.5833$

4) Zwei Wahrscheinlichkeitsverteilungen, die Sie kennen sollten:

- a) Binomialverteilung diskrete Verteilung
- b) Normalverteilung stetige Verteilung

zu a) Binomialverteilung

Bp: In einer Nachrichtenübertragung wird ein Zeichen mit einer Wahrscheinlichkeit $p=0.9$ richtig übertragen. Die Nachricht bestehe aus 8 Zeichen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden höchstens zwei Zeichen falsch übertragen?

Lösung: $p=0.9$ $q=1-p=0.1$ $n=8$
 q ist die W für: Zeichen falsch übertragen

$$P(X=0) = \binom{8}{0} 0.1^0 \cdot 0.9^8 = 0.43046$$

$$P(X=1) = \binom{8}{1} 0.1^1 \cdot 0.9^7 = 0.38263$$

$$P(X=2) = \binom{8}{2} 0.1^2 \cdot 0.9^6 = 0.14880$$

$$0.96189$$

zu b) Normalverteilung

Bp: Die Körpergröße von Männern kann als normalverteilt angesehen werden. Für 18-20-jährige ergibt sich ein Mittelwert von $\mu = 1.8\text{m}$ bei einer Standardabweichung von $\sigma = 7.4\text{cm}$

Frage: Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein zufällig ausgewählter Mann dieser Altersgruppe zwischen 1.7 und 1.9m groß?

Lösung: $P(1.7 < X < 1.9)$

$$\stackrel{\uparrow}{=} \Phi\left(\frac{190-180}{7.4}\right) - \Phi\left(\frac{170-180}{7.4}\right)$$

Übergang zur Standardnormalverteilung $= \Phi\left(\frac{10}{7.4}\right) - \Phi\left(\frac{-10}{7.4}\right)$

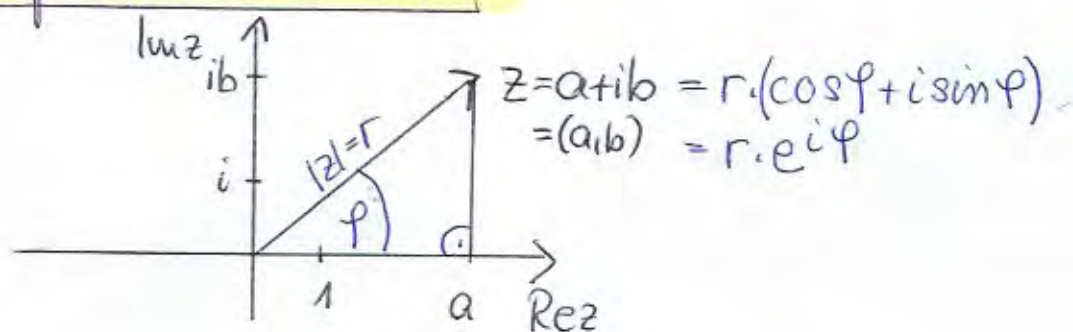
$$= \Phi(1.3513) - \Phi(-1.3513)$$

$$= \Phi(1.3513) - (1 - \Phi(1.3513)) = 2\Phi(1.3513) - 1$$

$$= 2 \cdot 0.91149 - 1 = 1.82298 - 1 = 0.82298$$

↑
Tabelle

III Komplexe Zahlen



$$\sqrt{-1} := i$$

$$a = \operatorname{Re} z$$

$$b = \operatorname{Im} z$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

Achtung: auf Quadranten achten

$$z = a + ib \quad \text{kartesische Form}$$

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad \text{trigonometrische Form}$$

$$z = r \cdot e^{i\varphi} \quad \text{Exponentialform}$$

Je nachdem, was zu berechnen ist im Bereich der komplexen Zahlen, muss eine der drei Formen gewählt werden, bzw. in eine der drei Formen umgerechnet werden.

Bp: Berechnen Sie $(8\sqrt{2} + 8\sqrt{2}i)^{\frac{1}{4}}$

andere Formulierung: Lösen Sie die Gleichung

$$z^4 = 8\sqrt{2} + 8\sqrt{2}i$$

(Berechnen der vier komplexen Wurzeln)

Lösung: $r = \sqrt{(8\sqrt{2})^2 + (8\sqrt{2})^2} = \sqrt{256} = 16$

$$\varphi = \arctan \frac{8\sqrt{2}}{8\sqrt{2}} = \arctan 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

4 Wurzeln: $z_0 = \sqrt[4]{16} \cdot e^{i \frac{\pi}{16}} = 2e^{i \frac{\pi}{16}}$

$z_1 = \sqrt[4]{16} \cdot e^{i \frac{\pi}{16} + \frac{2\pi}{4}} = 2e^{i \frac{9\pi}{16}}$

$z_2 = \sqrt[4]{16} \cdot e^{i \frac{\pi}{16} + \frac{4\pi}{4}} = 2e^{i \frac{17\pi}{16}}$

$z_3 = \sqrt[4]{16} \cdot e^{i \frac{\pi}{16} + \frac{6\pi}{4}} = 2e^{i \frac{25\pi}{16}}$

} Umwandeln in die kartesische Form falls gefragt!

Wichtig für @: Potenzieren, Wurzelziehen

IV Differentialgleichungen (DGL)

(140)

Sie müssen wissen:

Eine DGL ist eine mathematische Gleichung für eine gesuchte Funktion, in der zusätzlich Ableitungen dieser Funktion vorkommen. Die höchste Ordnung der Ableitung, die in der Gleichung vorkommt, bestimmt die Ordnung der DGL.

Lösungsaussätze werden immer irgendwie mit der Integration zusammenhängen. Für Sie von Bedeutung: linearen DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, homogen. Der Lösungssatz $y = A \cdot e^{\lambda x}$ führt letztendlich auf das Lösen der sogenannten char. Gleichung, einer quadratischen Gleichung.

Bp: $y''(x) - 5y'(x) + 4y(x) = 0$

Ansatz: $y = A \cdot e^{\lambda x}$

char. Gleichung: $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$
 $\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{+5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2}$
 $\lambda_1 = 4 \quad \lambda_2 = 1$

Allg. Lösung: $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^x$

V Mehrdimensionale Analysis

Sie müssen wissen:

partielle Ableitungen 1. und höherer Ordnung

Die partiellen Ableitungen 1. Ordnung werden zu einem Vektor zusammengefasst.

Sie kennen die Schreibweise $\text{grad}_f = \begin{pmatrix} f_{x_1} \\ \vdots \\ f_{x_n} \end{pmatrix}$

Bitte merken Sie sich nun doch auch folgende (141.)
Schreibweisen:

$$\text{grad } f = \nabla f$$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} \text{ etc.}$$

Übungen:

partielle Ableitungen

$$f(x,y) = 6x^2 + 5xy - 7y^2 + 3x + 2y - 13$$

$$f_x = 12x + 5y + 3$$

$$f_y = 5x - 14y + 2$$

totales Differential

$$f(x,y) = 4x^2 - 3xy^2 + x \cdot e^y$$

$$f_x = 8x - 3y^2 + e^y$$

$$f_y = 6xy + x \cdot e^y$$

$$dz = (8x - 3y^2 + e^y) \cdot dx + (6xy + x \cdot e^y) \cdot dy$$

$$dz = \nabla f \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \text{ Skalarprodukt}$$

Extremwerte

notwendige Bedingungen

hinreichende Bedingungen

Extremwerte mit Nebenbedingungen

Variablensubstitution

Methode von Lagrange

Übung: Stellen Sie die Lagrangefunktion auf für folgende Fragestellung

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= x+2y-z && \text{Zielfunktion} \\ g_1(x,y,z) &= x^2+y^2-8=0 \\ g_2(x,y,z) &= x+z-4=0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} f(x,y,z) &= x+2y-z \\ g_1(x,y,z) &= x^2+y^2-8=0 \\ g_2(x,y,z) &= x+z-4=0 \end{aligned}} \right\} \text{2 Nebenbedingungen}$$

Ausatz:

$$\begin{aligned} L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) &= f(x,y,z) + \lambda_1 g_1(x,y,z) + \lambda_2 g_2(x,y,z) \\ &= x+2y-z + \lambda_1(x^2+y^2-8) + \lambda_2(x+z-4) \end{aligned}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} L_x &= 1 + 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0 \\ L_y &= 2 + 2\lambda_1 y = 0 \\ L_z &= -1 + \lambda_2 = 0 \\ L_{\lambda_1} &= x^2 + y^2 - 8 = 0 \\ L_{\lambda_2} &= x + z - 4 = 0 \end{aligned}$$

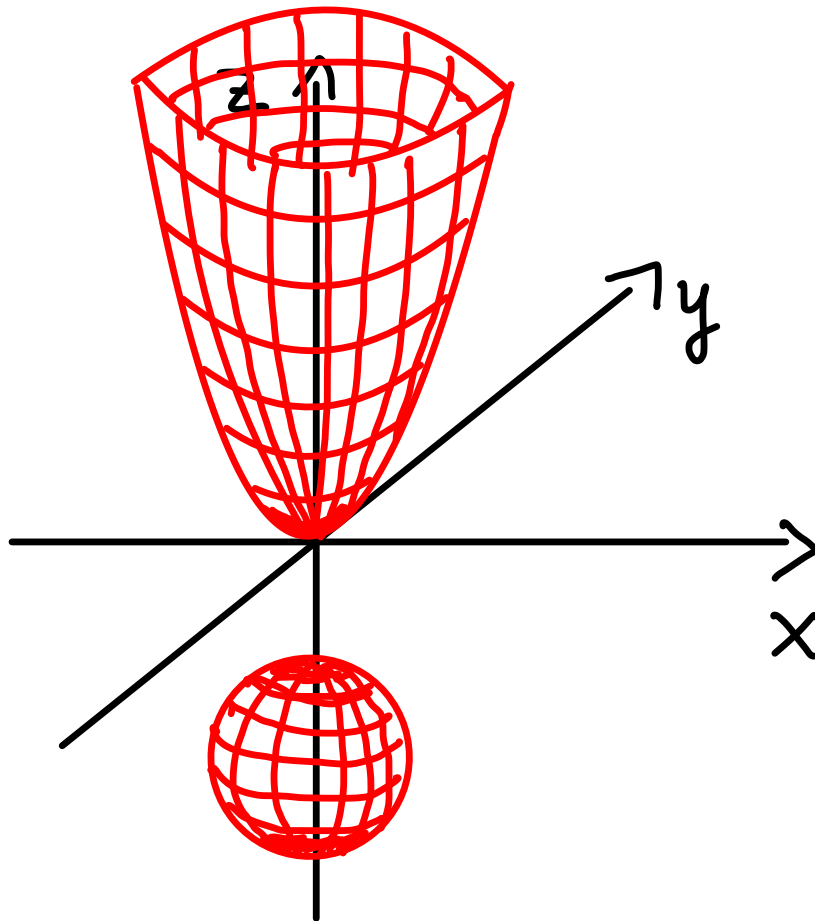
VI Graphentheorie

Wichtig: Darstellung von Graphen in Adjazenz- und Incidenzmatrizen

Graphen kreisungsfrei zeichnen aus gegebenen Adjazenz- und Incidenzmatrizen.

	Blatt Nr.
Adjazenzmatrix	85
Adjazenzmatrix Potenzen	105
Algorithmus von Dijkstra	114
Algorithmus von Kruskal	110
Anpassung mit Hilfe von Ausgleichskurven	74
Artikulationspunkt	82
Aufspannender Baum	107
Ausgleichsrechnung	65
Baum	92
Beispiel Algorithmus von Dijkstra	117
Beispiele partielle Ableitungen	14-20
Bewerteter Graph	84
Binärbaum	96
Binärer Suchbaum	97
Breitensuche	109
Brücke	83
Das totale Differential	33
Differential	27
Dijkstra	114
Dreidimensionale Funktionen Beispiele	6
Ebene im Raum	3
Eulersche Linie	89
Eulerscher Satz	90
Eulerzug	89
Extremwertberechnung	37
Extremwerte Mehrdimensionale Funktionen	7
Extremwerte mit Nebenbedingungen	46
Funktion mit n unabhängigen Variablen	1
Gerichteter Graph	84
Gerüst	107
Gradient	13
Graph	78
Graphentheorie	75
Hamiltonsche Linie	91
Hauptunterdeterminante	41
Hesse Matrix	24
Hinreichende Bed. Methode v Lagrange	57
Hinreichende Bedingung	40
Höhe eines Wurzelbaums	95
Höhenlinien	4
Huffman Baum	100
Huffman Code	99
Interpretation Lagrange-Multiplikator	63
Inzidenzmatrix	87
Isomorphe Graphen	104

Kantenfolge	88
Kantenzug, Kantenweg, Kantenzzyklus	89
Knotengrad	80
Königsberger Brückenproblem	77
Krümmung	9
Kruskal	110
Kürzeste Wege in Graphen	113
Linearisierung der Funktion	34
Lösung Zusatzaufgabe Dijkstra-Algorithmus	130
Matching	127
Maximalflussproblem	128
Methode der kleinsten Quadrate	67
Methode von Lagrange	51
Methode von Lagrange n Variablen k NB	55
Minimal aufspannender Baum	108
MST	108
Notwendige Bedingung	38
Nullstellen mehrdimensionale Funktionen	7
Partielle Ableitung 1. Ordnung	10
Partielle Ableitung 1. Ordnung 2 unabh. Var.	11
Partielle Ableitung 1. Ordnung n unabh. Var.	12
Partielle Ableitungen höherer Ordnung	22
Partielles Differential	29
Satz von Euler	90
Satz von Schwarz	23
Schnittkurven	5
Steigung	8
Stetigkeit	9
Tangentengleichung	30
Tangentialebene	31
Teilgraph	82
Tiefensuche	108
Trennende Knoten	82
Untergraph	82
Variablensubstitution	49
Vollständiger Graph	81
Wald	92
Weg	88
Wurzelbaum	94
Zusammenfassung alle Themen	132
Zusammenhängender Graph	80
Zusammenhangskomponente	80



Vorlesungsaufzeichnungen
Zoom-Vorlesung Mathematik 2 für die Studiengänge AI, MI, IT
SS 2021
Mehrdimensionale Analysis
Graphentheorie

Dr.rer.nat. Ane Schmitter