

**Aufgabe 1**

Gegeben ist ein Graph  $G = (M, K, v)$  mit der Knotenmenge

$$M = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}\} \quad \text{und der Kantenmenge}$$

$$K = \{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7, k_8, k_9, k_{10}, k_{11}\}$$

$v$  sei die Abbildung, die jeder Kante aus  $K$  zwei Knoten aus  $M$  zuordnet und zwar in folgender Weise:

$$v(k_1) = \{x_1, x_2\}, \quad v(k_2) = \{x_2, x_{10}\}, \quad v(k_3) = \{x_2, x_3\}, \quad v(k_4) = \{x_3, x_4\},$$

$$v(k_5) = \{x_4, x_6\}, \quad v(k_6) = \{x_4, x_5\}, \quad v(k_7) = \{x_5, x_7\}, \quad v(k_8) = \{x_5, x_8\},$$

$$v(k_9) = \{x_8, x_{11}\} \quad v(k_{10}) = \{x_9, x_{11}\} \quad v(k_{11}) = \{x_6, x_7\}$$

Bem.: Die Bezeichnung von Knoten und Kanten sowie der Abbildung  $v$  entspricht der Nomenklatur der Vorlesung.

- Zeichnen Sie diesen Graphen
- Ist dieser Graph schlicht?
- Was ändert sich am Graphen, wenn statt der geschweiften Mengenklammern runde Klammern bei der Angabe der Abbildung stehen?
- Geben Sie für diesen Graphen die Adjazenzmatrix

**Aufgabe 2**

Gegeben sind die Adjazenzmatrizen von vier Graphen. Zeichnen Sie diese möglichst kreuzungsfrei.

a)

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$
$x_1$	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
$x_2$	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1
$x_3$	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0
$x_4$	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
$x_5$	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0
$x_6$	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
$x_7$	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0
$x_8$	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
$x_9$	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1
$x_{10}$	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0

b)

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$
$x_1$	0	1	1	1	1	1	1	1
$x_2$	1	0	0	0	0	0	0	0
$x_3$	1	0	0	0	0	0	0	0
$x_4$	1	0	0	0	0	0	0	0
$x_5$	1	0	0	0	0	0	0	0
$x_6$	1	0	0	0	0	0	0	0
$x_7$	1	0	0	0	0	0	0	0
$x_8$	1	0	0	0	0	0	0	0

c)

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
$x_1$	0	1	0	0	0	1
$x_2$	1	0	1	0	0	0
$x_3$	0	1	0	1	0	0
$x_4$	0	0	1	0	1	0
$x_5$	0	0	0	1	0	1
$x_6$	1	0	0	0	1	0

d)

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
$x_1$	0	1	0	0	0
$x_2$	1	0	1	0	1
$x_3$	0	1	0	1	1
$x_4$	0	0	1	0	1
$x_5$	0	1	1	1	0

**Aufgabe 3**

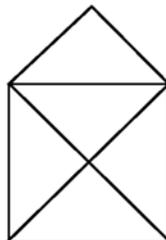
Zeichnen Sie einen Graphen mit 4 Knoten  $x_1, x_2, x_3, x_4$  und den Knotengraden  $d(x_1) = 3, d(x_2) = 2, d(x_3) = 2, d(x_4) = 1$

**Aufgabe 4**

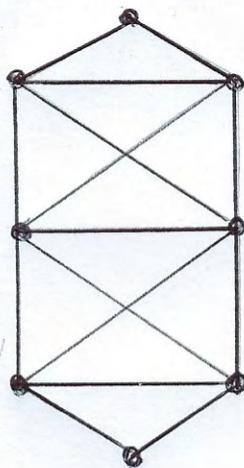
Acht Personen vereinbaren, dass jede von ihnen mit genau drei der übrigen telefoniert. Ist das möglich? Wie sieht der Graph dazu aus? Bei welchen Zahlenkombinationen (Anzahl der Personen, Anzahl der Telefonpartner) ist dies allgemein möglich bzw. nicht möglich?

**Aufgabe 5**

- Als Einleitung in das Thema Graphentheorie wird häufig das Königsberger Brückenproblem erläutert (s. Vorlesung). Dieses Problem wird oft als Beginn der Graphentheorie bezeichnet. Zeichnen Sie sich noch einmal den Graphen auf, der zu diesem Brückenproblem gehört und überlegen Sie, wie man es, durch richtiges Hinzufügen von weiteren Brücken lösen kann!
- Das Spiel „Haus vom Nikolaus“ besteht darin, unten stehende Figur ohne abzusetzen zu zeichnen. Das ist auch eine Art Brückenproblem, warum? Wo müssen Sie mit dem Stift ansetzen, damit das auch gelingt und warum gelingt das?



c) Gegeben ist das „doppelte Haus vom Nikolaus: Bezeichnen Sie Knoten und Kanten und geben dann einen Eulerweg an.



**Aufgabe 6**

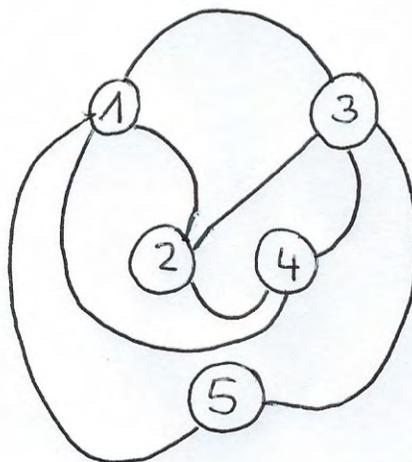
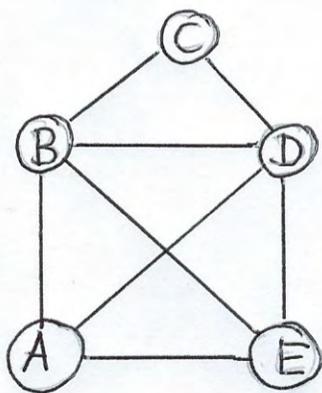
a) Folgender Graph ist durch seine Inzidenzmatrix gegeben! Zeichnen Sie ihn.

	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$
$x_1$	1	-1	1	0	0
$x_2$	-1	1	0	1	-1
$x_3$	0	0	-1	-1	0
$x_4$	0	0	0	0	1

- b) Beschreiben Sie diesen Graphen nach Definition: Knotenmenge  $M$ , Kantenmenge  $K$ ,  $v$  sei die Abbildung, die jeder Kante aus  $K$  zwei Knoten aus  $M$  zuordnet
- c) Ist der Graph zusammenhängend? Ist der Graph vollständig?
- d) Geben Sie einen Eulerweg in diesem Graphen an.
- e) Geben Sie eine Hamiltonsche Linie in diesem Graphen an.

**Aufgabe 7**

Sind die beiden folgenden Graphen **isomorph**? Wenn ja, geben Sie die zugehörige bijektive Abbildung (Isomorphismus) an und begründen Sie Ihr Vorgehen.



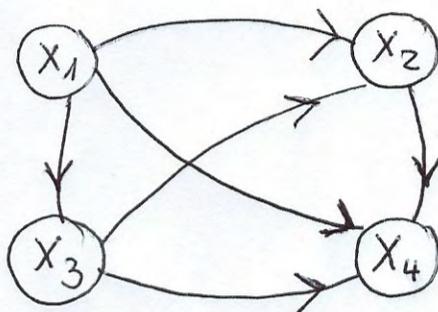
**Aufgabe 8**

- a) Stellen Sie folgenden arithmetischen Ausdruck durch einen **Binärbaum** dar. Die Operatoren seien die Knoten, die Operanden die Teilbäume und die Variablen und Konstanten die Endknoten. Bei der Konstruktion achte man auf Regeln zur

Klammerersparnis: 
$$\frac{x \cdot y + u \cdot v - 2 \cdot s \cdot t}{x \cdot z - (u + v)}$$

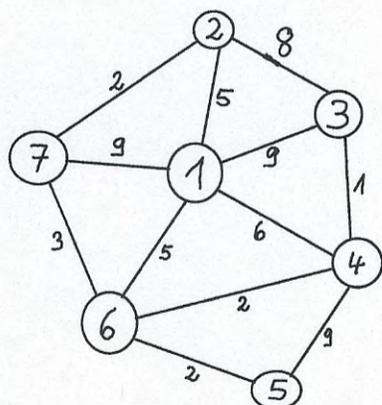
**Aufgabe 9**

Bestimmen Sie in folgendem Graphen jeweils die Anzahl der Wege der Länge 1, 2 und 3. Gibt es Wege der Länge 4? Versuchen Sie noch einmal zu erklären, warum die Potenzen der Adjazenzmatrix des Graphen die Wege der entsprechenden Länge repräsentieren?



**Aufgabe 10**

Gegeben ist ein Streckennetz mit Zentrum 1 mit z.B. Kosten als Kantenbewertung! Gesucht ist ein minimal spannender Baum. (Kruskal). Geben Sie die minimalen Gesamtkosten an.



**Aufgabe 11**

b) Konstruieren Sie den **Huffman-Baum** für folgenden Satz:

***IN ULM UND UM ULM UND UM ULM HERUM***

Wie lautet der Code für das U, wie für das I ?