

Übungsblatt 6 Integralrechnung + Wiederholung

Aufgabe 6.1

Für folgende bestimmte Integrale brauchen Sie noch keine komplizierte Regel:

$$\text{a) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx \quad \text{b) } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (2x + \sin(x) - \cos(x)) dx$$

Aufgabe 6.2 Substitutionsregel

$$\begin{array}{ll} \text{(a) } \int \cos(\pi - 2x) dx & \text{(b) } \int_1^2 x \sqrt{x^2 - 1} dx \\ \text{(c) } \int x(x^2 + 3)^4 dx & \text{(d) } \int_{\pi/2}^{2\pi} \sin(x) \cos(x) dx \end{array}$$

Aufgabe 6.3 Partielle Integration

$$\text{(a) } \int x \sin x dx \quad \text{(b) } \int x e^x dx \quad \text{(c) } \int x^2 \cos x dx$$

Aufgabe 6.4

Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale mit einer geeigneten Methode:

$$\text{a) } \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{x}{4}\right) dx \quad \text{b) } \int_1^e \ln x dx \quad \text{c) } \int_0^1 \frac{4x+6}{x^2+3x+2} dx$$

Aufgabe 6.5 Uneigentliche Integrale

Welche der folgenden uneigentlichen Integrale sind konvergent? Was ist im Falle der Konvergenz ihr Grenzwert?

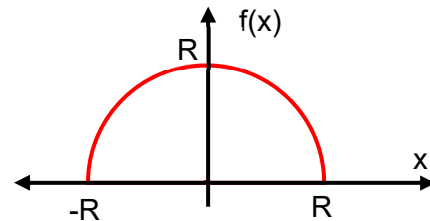
$$\begin{array}{ll} \text{(a) } \int_{-\infty}^0 e^x dx & \text{(b) } \int_0^{\infty} x e^{-x} dx \\ \text{(c) } \int_2^{\infty} \frac{1}{x^2} dx & \text{(d) } \int_0^{\infty} (3e^{-2x} - e^{-x}) dx \end{array}$$

Aufgabe 6.6 Flächenberechnung

Gegeben sei die Fläche, die von der Kurve mit der Gleichung $y = x^2$ ($x > 0$), der y-Achse und der Geraden mit der Gleichung $y = b^2$ begrenzt wird. Wie heißt die Gleichung der Geraden, welche die beschriebene Fläche halbiert und parallel zur x-Achse verläuft?

Aufgabe 6.7 Kugelvolumen

- (a) Welche Funktion $f(x)$ beschreibt den nebenstehend gezeichneten Halbkreis?
- (b) Berechnen Sie das Volumen einer Kugel mit Radius R , indem Sie den Halbkreis um die x-Achse rotieren lassen. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der Formelsammlung!

**Aufgabe 6.8 Rotationskörper**

Gegeben ist $f(x) = \frac{1}{2}x \cdot \sqrt{4-x}$

Die Fläche, die der Funktionsgraph zwischen seinen beiden Nullstellen mit der x-Achse einschließt, rotiere um die x-Achse. Berechnen Sie das Volumen des entstehenden Körpers.

Aufgabe 6.9 Wiederholung (Klausuraufgaben)

- a) Zeichnen Sie zwei Venn-Diagramme der Mengen A, B, C und schraffieren Sie darin die Mengen (i) $A \setminus (B \cap C)$ und (ii) $B \cup (A \setminus (B \cup C))$
- b) Vereinfachen Sie mit den Regeln der Aussagenlogik: $\overline{(C \vee \overline{D})} \vee D$
- c) Berechnen Sie annähernd $\sqrt{e}$ (e ist die **Eulersche Zahl**), indem Sie die Funktion $f(x) = e^x$ an der Stelle $x_0 = 0$ in ein **Taylorpolynom 6. Grades** entwickeln! Welchen Wert müssen Sie für x in das Taylorpolynom einsetzen? Wie genau ist diese Annäherung? Schätzen Sie die Genauigkeit der Annäherung (den Fehler) mit der **Restgliedformel von Lagrange** ab!
(Hinweis: Verwenden Sie bei der Abschätzung $C=2$. Können Sie begründen, warum 2 ein gültiger Wert ist?)