

Übungsblatt 8 Komplexe Zahlen + DGL

In den nachfolgenden Aufgaben bezeichnet i jeweils die imaginäre Einheit.

Aufgabe 8.1 Rechnen mit komplexen Zahlen

Berechnen Sie:

- a) $6+4i - (5 - 2i)$
- b) $4i + 2i^2 - i(3 + 5i)$
- c) $|10 + 8i| - |10 - 8i|$
- d) $\frac{4i + 2i^2}{3 - 2i}$
- e) $\frac{i}{5 + 2i}$

Hinweis: Der Bruch zweier komplexer Zahlen „Zähler durch Nenner“ wird berechnet, indem man mit dem komplex-konjugierten Nenner erweitert:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot z_2^*}{z_2 \cdot z_2^*}$$

Aufgabe 8.2 Darstellungsformen komplexer Zahlen

Ergänzen Sie die jeweils fehlenden Darstellungsformen

| | kartesische Form | Polarform | |
|----|------------------|--|-----------------|
| | | trigonom. Form | Exponentialform |
| a) | i | | |
| b) | | | $2e^{i\pi}$ |
| c) | | $\cos(\frac{3}{2}\pi) + i\sin(\frac{3}{2}\pi)$ | |
| d) | $-3 + 6i$ | | |
| e) | $4 - 12i$ | | |

Aufgabe 8.3

- a) Man berechne Real- und Imaginärteil von

$$z_1 = (1 - \sqrt{3} \cdot i)^5 \quad \text{und} \quad z_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (1 + i) \right)^{20}$$

- b) Gegeben ist $Z = -8 + 8i\sqrt{3}$. Man berechne $\sqrt[4]{Z}$.

Aufgabe 8.4 Graphisches Rechnen mit komplexen Zahlen

Gegeben sind die beiden komplexen Zahlen: $z_1 = 1 - 5i$; $z_2 = 4 + 3i$.

- Addieren und subtrahieren Sie die Zahlen graphisch in der Gaußschen Zahlenebene. Zeichnen Sie die konjugiert komplexe Zahl zu z_1 ebenfalls ein.
- Man stelle z_1 und z_2 in Exponentialform dar. Bilden Sie nun z_1^2 , $\sqrt[3]{z_1}$, $z_1 \cdot z_2$ ebenfalls mit graphischen Methoden.

Aufgabe 8.5 Komplexe quadratische Gleichung

λ sei eine beliebige reelle Zahl. Bestimmen Sie die zwei komplexen Lösungen der folgenden Gleichung mittels quadratischer Ergänzung:

$$z^2 - (\lambda - 2i)z - (1 + \lambda i) = 0$$

Ermitteln Sie Real- und Imaginärteile von $z_{1,2} \in \mathbf{C}$.

Aufgabe 8.6 DGL mit nur einem Ableitungsterm

Die Beschleunigung einer Kugel in einem Computerspiel sei gegeben durch die Differentialgleichung

$$s''(t) = -2t + 5$$

- Interpretieren Sie die Differentialgleichung (Ordnung, Linearität, Homogenität), jeweils mit einem Begründungssatz.
- Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung. Wieviel freie Parameter hat sie?
- Lösen Sie die Differentialgleichung für die Anfangsbedingungen $s(0) = 1$, $s'(0) = 2$.

Aufgabe 8.7 Anfangswertproblem

Ermitteln Sie die Lösung des Anfangswertproblems (Ansatz: $x(t) = e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbf{C}$)

$$x''(t) + 4x'(t) + 3.75x(t) = 0, \quad x'(0) = 4, \quad x(0) = 0$$

Aufgabe 8.8 Lineare DGL

- Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der DGL (Ansatz: $y(t) = e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbf{C}$)

$$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = 0$$

- Ermitteln Sie die spezielle Lösung für $y(0) = -1 - 2i$ und $y'(0) = 5$.
- Machen Sie die Probe, ob die spezielle Lösung die DGL löst.