V 16.05.2022

Montag, 16. Mai 2022 10:51

Komplexe Zahlen $z = a + ib$

konjugiert-komplexe Zahl $z^* = \bar{z} = a - ib$

Addition: $z_1 + z_2 = a_1 + ib_1 + a_2 + ib_2$

$$= (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

Multiplikation: $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2)$

$$= a_1 a_2 + a_1 i b_2 + i b_1 a_2 + \underbrace{i^2}_{-1} b_1 b_2$$

$$= \underbrace{(a_1 a_2 - b_1 b_2)}_{Re(z_1 z_2)} + i \underbrace{(a_1 b_2 + b_1 a_2)}_{Im(z_1 z_2)}$$

Betrag komplexer Zahlen: Sei $z = a + ib$ komplexe Zahl

$$z \cdot z^* = (a + ib)(a - ib) = (a^2 + b^2) + i(ab - ab)$$

$i(-i) = -i^2 = 1$

$$= (a^2 + b^2) + \cancel{i \cdot 0}$$

$\sqrt{z \cdot z^*} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$: Betrag der kompl. Zahl z

Division: Beispiel

$$\frac{1+2i}{1-i} = \frac{(1+2i)}{(1-i)} \cdot \frac{(1+i)}{(1+i)} = \frac{1 - 2 + 2i + i}{1^2 + 1^2 + i \cdot 0} = \frac{-1 + 3i}{2}$$

$$= -\frac{1}{2} + i\,\frac{3}{2}$$

Ü Komplexe Zahlen

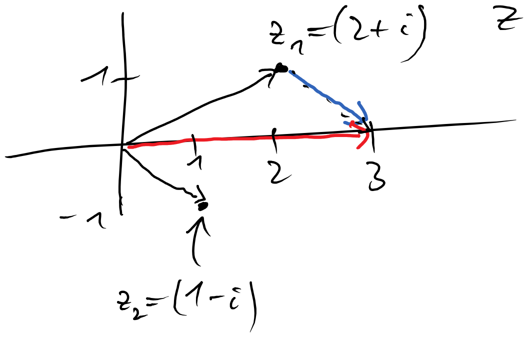
a) $i(3-2i) = i3 - 2\underbrace{i^2}_{-1} = \underbrace{2}_{\text{Real-}} + \underbrace{3}_{\text{Imag-}}i$

Real- Imag-
teil

b) $|\underbrace{3}_{\substack{Re \\ a}} \underbrace{-4}_{\substack{Im \\ b}}i| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{3^2+(-4)^2} = \sqrt{25} = 5$

c) $$\frac{3+4i}{2-i} = \frac{(3+4i)}{(2-i)}\frac{(2+i)}{(2+i)} = \frac{6-4+(8+3)i}{2^2+(-1)^2} = \frac{2+11i}{5}$$

Addition graphisch $\underbrace{(2+i)}_{z_1} + \underbrace{(1-i)}_{z_2} = (3+0\cdot i)$



Bew. Eulersche Formel

Taylorreihe $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$ $\qquad x = i\varphi$

$$e^{i\varphi} = 1 + \frac{i\varphi}{1!} + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\varphi)^4}{4!} + \ldots$$

$$= 1 + i\frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^2}{2!} - i\frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \ldots$$

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \ldots$$

$$i\sin\varphi = i\frac{\varphi}{1!} - i\frac{\varphi^3}{3!} + \ldots$$

$$e^{i\varphi} = \underbrace{\cos\varphi}_{\text{Realteil}} + i\underbrace{\sin\varphi}_{\text{Imag. teil}}$$

Ü Tabelle Polarform

z	$Re(z)$	$Im(z)$	
e^{i0}	$\cos(0)=1$	$\sin(0)=0$	$e^{i0}=1+i\cdot 0$
$e^{i\pi}$	$=-1$	$=0$	$e^{i\pi}=-1+i\cdot 0$
$e^{i2\pi}$	$=1$	$=0$	$e^{i2\pi}=1+i0=e^{i0}$
$e^{i\pi/2}$	$=0$	$=1$	$e^{i\frac{\pi}{2}}=0+i\cdot 1$

$$\boxed{e^{i\frac{\pi}{2}}=i}$$

lauter komplexe Zahlen mit $r=1$

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$$