Vorlesung 18.05.22

Mittwoch, 18. Mai 2022 10:56

Beispiel "kartesisch → Polar"

1) $z = -2 + 2\sqrt{3}\,i$

$\mathrm{Re}(z)$ $\mathrm{Im}(z)$

< 0, also $+\pi$

$$\Rightarrow r = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = 4$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{2\sqrt{3}}{-2}\right) + \pi = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2}{3}\pi \triangleq 120°$$

$$\Rightarrow z = 4e^{i\frac{2}{3}\pi} = 4e^{i\,120°}$$

2) $z = 3e^{i\,5\pi/3}$: "Polar → kartesisch"

$$x = \mathrm{Re}(z) = r\cos\varphi = 3\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 1.5$$

$$y = \mathrm{Im}(z) = r\sin\varphi = 3\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{3}{2}\sqrt{3} \approx -2.598$$

Übung: Rechnen Sie $z = 1.5 + i\left(-\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$ wieder um in Polarform

$$r = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{9}{4}\cdot 3} = \sqrt{9} = 3$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{-\frac{3}{2}\sqrt{3}}{\left(\frac{3}{2}\right)}\right) + 0 = -\frac{\pi}{3} \triangleq \frac{5\pi}{3} = 300°$$

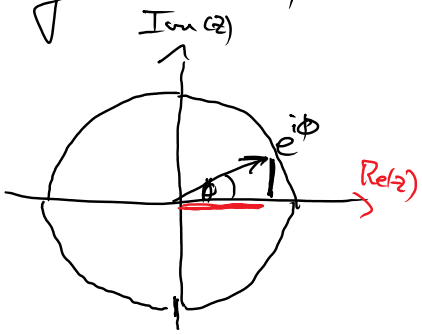
$\mathrm{Re} > 0$, kein $+\pi$

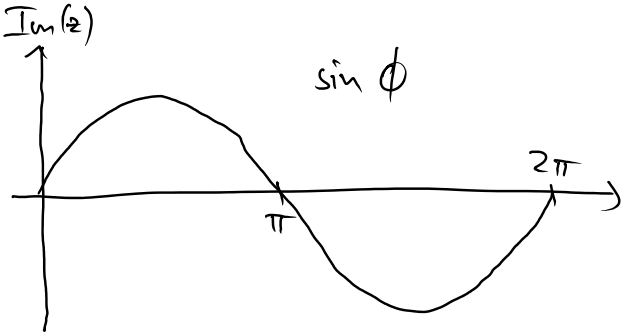
Komplexe Zahl "z hoch n"

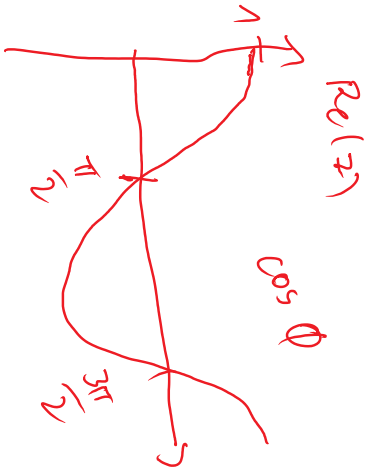
$$z^3 = (r\,e^{i\varphi})^3 = r^3 e^{i3\varphi}$$

Betrag hoch 3, Phase mal 3

Gauss Ebene







Potenzieren mit $c = \frac{p}{q}$ (rationale Zahl)

$$z^{\frac{p}{q}} = \left(\left(r e^{i\phi} \right)^p \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left(r^p e^{i(p\phi + 2k\pi)} \right)^{\frac{1}{q}}$$

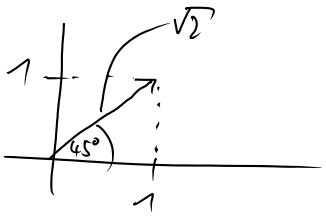
$$= r^{\frac{p}{q}} e^{i\left(\frac{p}{q}\phi + \frac{2k}{q}\pi\right)} \quad , \quad k = 0, 1, \ldots, q-1$$

1) Warum $+2k\pi$ erst nach dem p-Potenzieren?
Man könnte es auch vorher machen, aber dann wären die Lösungen nicht "ordentlich" sortiert: $+\frac{2\pi p}{q}$ anstelle von $\frac{2\pi}{q}$

2) Warum kein $+2k\pi$ bei "c ist ganze Zahl n" (Fall 1)?
Wäre nicht verboten, ist aber redundant, denn es führt auf $+\frac{2k \cdot n\pi}{1} \triangleq 0$

$z = (1+i)^{3/4}$

$w = Re^{i\alpha}$

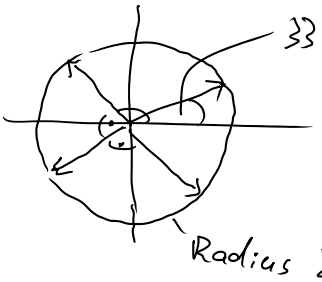


$R = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$\alpha = \operatorname{atan}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4} \mathrel{\hat{=}} 45°$

$\frac{3}{16}\pi \approx 33°$

$w = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$



$$z = (1+i)^{\frac{3}{4}} = \left(\sqrt{2}\, e^{i\pi/4}\right)^{\frac{3}{4}} = \left(2^{\frac{3}{2}}\, e^{i\left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right)}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$= 2^{\frac{3}{8}}\, e^{i\left(\frac{3\pi}{16} + \frac{2k\pi}{4}\right)}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$4 - 1$

Satz von Moivre

$$(\cos\phi + i\sin\phi)^n = \left(e^{i\phi}\right)^n = e^{in\phi} = \cos(n\phi) + i\sin(n\phi)$$

Euler-Formel (über $(\cos\phi + i\sin\phi)^n = \left(e^{i\phi}\right)^n$)

Euler-Formel (über $e^{in\phi} = \cos(n\phi) + i\sin(n\phi)$)