DGL

Mittwoch, 25. Mai 2022 10:59

ab Mo 30.05. : meine V+Ü bei Dr. Ane Schmitter

ane.schmitter@th-koeln.de

Aktivierung homogene lin. DGL

	Antwort
$x''(t) = x(t)$	e^t , e^{-t} $\quad x(t) = e^{\pm t}$
$x''(t) = a\,x(t)$	$x(t) = e^{\pm\sqrt{a}t}$
$x''(t) = -x(t)$	$\sin(t)$, $\cos(t)$ $(\Leftarrow)$ $e^{\pm it}$ $e^{it} + e^{-it} = \cos t + i\sin t + \underbrace{\cos(-t)}_{\cos t} - i\sin(t)$ $= 2\cos t$ $e^{it} - e^{-it} = 2i\sin t$
$x''(t) = -a\,x(t)$	$x(t) = e^{\pm i\sqrt{a}t}$

$(e^{-t})' = -e^{-t}$

$(-e^{-t})' = e^{-t}$

$\sin(t) \to$

$\sin'(t) = \cos(t)$

$\sin''(t) = -\sin(t)$

$\cancel{\sin(t) - \sin(t)} = 0$

$\sin(it)' \to$

$(\sin(it))'' = i^2(-\sin(it))$

$= \sin(it)$

Alle 'roten' Lösungen sind von der Form

$$\boxed{e^{\lambda t}, \quad \lambda \in \mathbb{C}}$$

Herleitung S12-1

Wir setzen den Ansatz $x(t) = e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, in DGL

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 x(t) = 0 \Rightarrow$$

$$(e^{\lambda t})^{(n)} + a_{n-1} (e^{\lambda t})^{(n-1)} + \ldots + a_0 e^{\lambda t} = 0$$

$$\underbrace{(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} \quad a_0)}_{P_n(\lambda)} \underbrace{e^{\lambda t}}_{\text{immer } \neq 0} = 0$$

→ Fundamentalsatz: $P_n(\lambda) = 0$ hat n Linearfaktoren ('Lösungen')

Bsp radioaktiver Zerfall $x'(t) + 0.05\,x(t) = 0$

Wie lautet $x(t)$, wenn $x(0) = 4$ gelten so

Lösung Ansatz $x(t) = e^{\lambda t}$

$$\underbrace{(\lambda + 0.05)}_{P_1(\lambda)} e^{\lambda t} = 0$$

$P_1(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -0.05 \Rightarrow$ spez. Lsg $e^{-0.05t}$

allg. Lsg $c_1 e^{-0.05t}$, $c_1 \in \mathbb{R}$

Anfangsbedingung

$$\left.\begin{aligned} x(0) &= 4 \\ c_1 e^{-0.05 \cdot 0} &= 4 \\ c_1 &= 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Lsg Anfangswertproblem } x(t) = 4e^{-0.05t}$$

Ü 1

Mittwoch, 25. Mai 2022 12:05

Löse DGL $x''(t) + 4x(t) = 0$

a) Lösung Ansatz

$$x(t) = e^{\lambda t}$$
$$x'(t) = \lambda e^{\lambda t}$$
$$x''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

in DGL einsetzen

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + 4 e^{\lambda t} = 0$$

$$\underbrace{(\lambda^2 + 4)}_{P(\lambda)} e^{\lambda t} = 0$$

$$P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = -4$$

$$\Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \pm 2i$$

also sind $x_1(t) = e^{2it} = \cos(2t) + i\sin(2t)$

$x_2(t) = e^{-2it}$ Lösungen der DGL

b) Nehme $x_1(t)$ und bilde Real- und Imaginärteil

$$\mathrm{Re}(x_1(t)) = \cos(2t)$$
$$\mathrm{Im}(x_1(t)) = \sin(2t)$$

Nach S 12-3 ist $\boxed{a\cos(2t) + b\sin(2t)}$ die allg. rein reelle Lsg (wenn $a, b \in \mathbb{R}$)

[$x_2(t) = \cos(-2t) + i\sin(-2t)$

$= \cos(2t) - i\sin(2t)$ liefert keine neuen Lösungen]

Lsg Ü2 (gedämpfte Schwingung)

$$x''(t) + 4x'(t) + 404\,x(t) = 0$$ Ansatz $e^{\lambda t}$

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + 4\lambda e^{\lambda t} + 404\,e^{\lambda t} = 0$$

$$(\lambda^2 + 4\lambda + 404)\,e^{\lambda t} = 0$$

$$\lambda^2 + 4\lambda + 404 = 0$$ quadr. Erg

$$\lambda^2 + 4\lambda + 2^2 - 2^2 + 404 = 0$$

$$(\lambda+2)^2 = -400$$

$$\boxed{\lambda_{1,2} = -2 \pm 20i}$$

$$x_1(t) = e^{-2t+20it} = e^{-2t}e^{20it}$$

$$x_2(t) = e^{-2t-20it} = e^{-2t}e^{-20it}$$

$e^{20it} = \cos(20t) + i\sin(20t)$

Reelle Lsg: $\mathrm{Re}(x_1(t)) = \underline{e^{-2t}\cos(20t)}$

$\mathrm{Im}(x_1(t)) = \underline{\underline{e^{-2t}\sin(20t)}}$

Allg + reelle Lsg $\quad a e^{-2t}\cos(20t) + b e^{-2t}\sin(20t)$