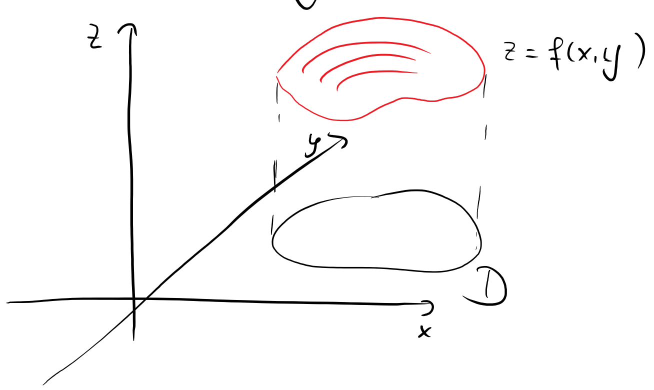
Vorlesung 8.6.22



Partielle Ableitungen 1. Ordnung von $z = f(x,y)$

$f_x(x,y)$

$f_y(x,y)$

Def: Gradient

Sei $z = f(x_1, \dots, x_n)$ Fkt. mit n unabh. Variablen

$$\text{grad } f(x) = \begin{pmatrix} f_{x_1} \\ f_{x_2} \\ \vdots \\ f_{x_n} \end{pmatrix} = (f_{x_1} \; f_{x_2} \; \dots \; f_{x_n})$$

Spaltenvektor

Zeilenvektor

Bp.: $z = f(x,y) = 2xy - 3x^2 + \frac{1}{y}$

Berechnen Sie den Gradienten im Punkt (2,1)

$z_x = f_x(x,y) = 2y - 6x$ (Achtung "y konstant")

$\frac{1}{y}$ ableiten

$z_y = f_y(x,y) = 2x - \frac{1}{y^2}$ (Achtung "x konstant")

$\frac{1}{y} = y^{-1}$

Ableitung: $-1 \cdot y^{-1-1} = -y^{-2} = -\frac{1}{y^2}$

$$\text{grad } f(x) = \begin{pmatrix} 2y - 6x \\ 2x - \frac{1}{y^2} \end{pmatrix} \qquad \text{grad } f(2,1) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 - 6 \cdot 2 \\ 2 \cdot 2 - \frac{1}{1^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Bem: Auch bei Funktionen mit mehreren unabh. Variablen werden beim Differenzieren Ableitungsregeln notwendig sein.

(Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel)

Bp: 1) $z = f(x,y) = y \cdot e^{x^2+y^2}$

$z_x(x,y) = f_x(x,y) = y \cdot 2x \cdot e^{x^2+y^2} = 2x \cdot y \cdot e^{x^2+y^2}$ (Kettenregel)

Produktregel: $(u \cdot v)' = u'v + uv'$

$z_y(x,y) = f_y(x,y) = 1 \cdot e^{x^2+y^2} + y \cdot 2y \cdot e^{x^2+y^2}$ Produktregel i.V.m. Kettenregel

2) $u(x,y,z) = 2x \cdot e^{yz} + \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

NB: Ableitung von Wurzelfkt:

$u_x(x,y,z) = 2 \cdot e^{yz} + \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x$ (innere Ableitung)

$= 2 \cdot e^{yz} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$u_y(x,y,z) = 2x \cdot z \cdot e^{yz} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$u_z(x,y,z) = 2xy \cdot e^{yz} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

ÜA: $z = f(x,y) = \ln(x^2+y^2) - e^{2xy} + 3x$

Bestimmen Sie den Wert des Gradienten für $(0,2)$ bzw. $(1,-6)$

Partielle Ableitungen höherer Ordnung

$z = f(x,y)$

$z_x \quad z_y$ 2 partiellen Ableitungen 1. Ordnung

$z_{xx} \quad z_{xy} \quad z_{yx} \quad z_{yy}$ 4 partielle Ableitungen 2. Ordnung

erst nach x und dann wieder nach x

$\left.\begin{matrix} z_{xx} \\ z_{yy} \end{matrix}\right\}$ direkte Ableitungen

$\left.\begin{matrix} z_{xy} \\ z_{yx} \end{matrix}\right\}$ gemischten Ableitungen

Frage: $z = f(x,y)$ Wie viele partielle Ableitungen 3. Ordnung gibt es?

8 Stück

Bem: $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ Fkt. mit n Variablen

Es ex. n partielle Ableitungen 1. Ordnung

n^2 partielle Ableitungen 2. Ordnung

n^m partielle Ableitungen m-ter Ordnung

Satz von Schwarz

Ist eine Funktion f mit n unabh. Variablen m-mal stetig differenzierbar, so sind die gemischten Ableitungen m-ter Ordnung unabh. von der Reihenfolge des Differenzierens alle gleich.

Bp: $z = f(x,y) \quad : \quad z_{xy} = z_{yx}$

$z = f(x_1, x_2, x_3) \quad : \quad z_{x_1 x_2 x_3} = z_{x_2 x_3 x_1} = \ldots \quad \ldots$ (6 Stück : Permutationen $= 3!$)

Bitte prüfen Sie den Satz von Schwarz nach für

$$z = f(x,y) = x^2 \cdot y + 2x^5 \cdot y$$

$$z_{xy} = z_{yx} = 2x + 10x^4$$

Darstellung der n partiellen Abl. 1. Ordnung : Gradient (Vektor)

Darstellung der n^2 partiellen Abl. 2. Ordnung : Matrix

Def: Ist $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ $\quad x = (x_1, \ldots, x_n)$ n-Tupel

zweimal partiell differenzierbar, so heißt

$$H(x) = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(x) & \ldots & f_{x_1 x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_n x_1}(x) & \ldots & f_{x_n x_n}(x) \end{pmatrix}$$

heißt Hesse'sche Matrix von f an der Stelle x $\quad (x = (x_1, \ldots, x_n))$

andere Bezeichnungen: Jacobi'sche Matrix

Funktionalmatrix

Frage: Welche Eigenschaften hat $H(x)$?

$H(x)$ ist symmetrisch (Satz von Schwarz)

$H(x)$ ist quadratisch

Bp: 1) $z = f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^2 \cdot x_3 + x_3$

$f_{x_1}(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2$

$f_{x_2}(x_1, x_2, x_3) = 2x_2 \cdot x_3$

$f_{x_3}(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 + 1$

$\Big(f_{\ldots} = 6x_1 \quad f_{\ldots} = 0 \quad f_{\ldots} = 0 \Big)$

$$H(x) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} = 6x_1 & f_{x_1x_2} = 0 & f_{x_1x_3} = 0 \\ f_{x_2x_1} = 0 & f_{x_2x_2} = 2x_3 & f_{x_2x_3} = 2x_2 \\ f_{x_3x_1} = 0 & f_{x_3x_2} = 2x_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Bp: } H(1,-1,-1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$