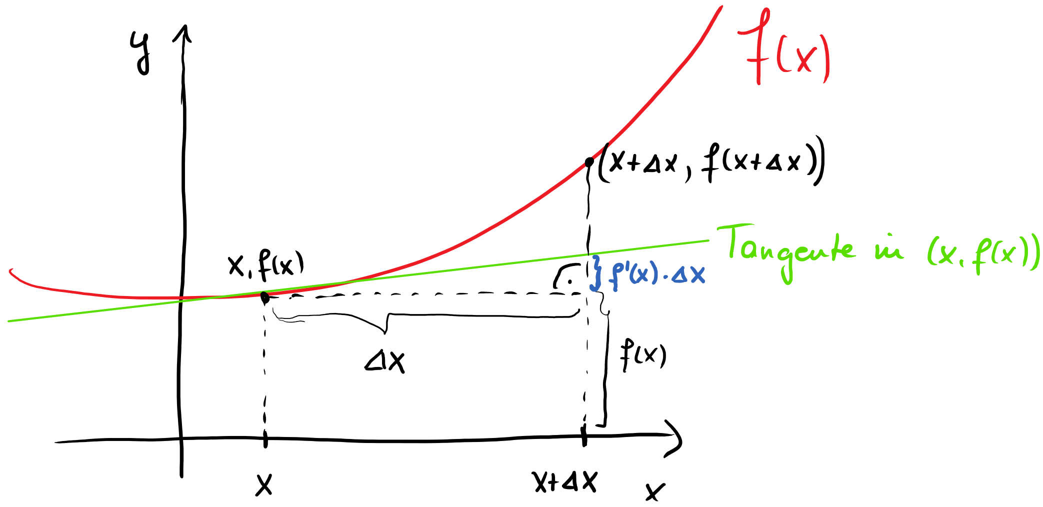
Vorlesung 13.6.2022

Online Evaluations-Bogen : P4L7K

Thema heute : Das totale Differential

Zunächst : Partielles Differential



$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx}$ Differentialquotient

Es gilt: $f(x+\Delta x) \cong f(x) + f'(x)\cdot\Delta x$ „Linearisierung"

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(f(x+\Delta x)-f(x)\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\cdot\Delta x = f'(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x$$

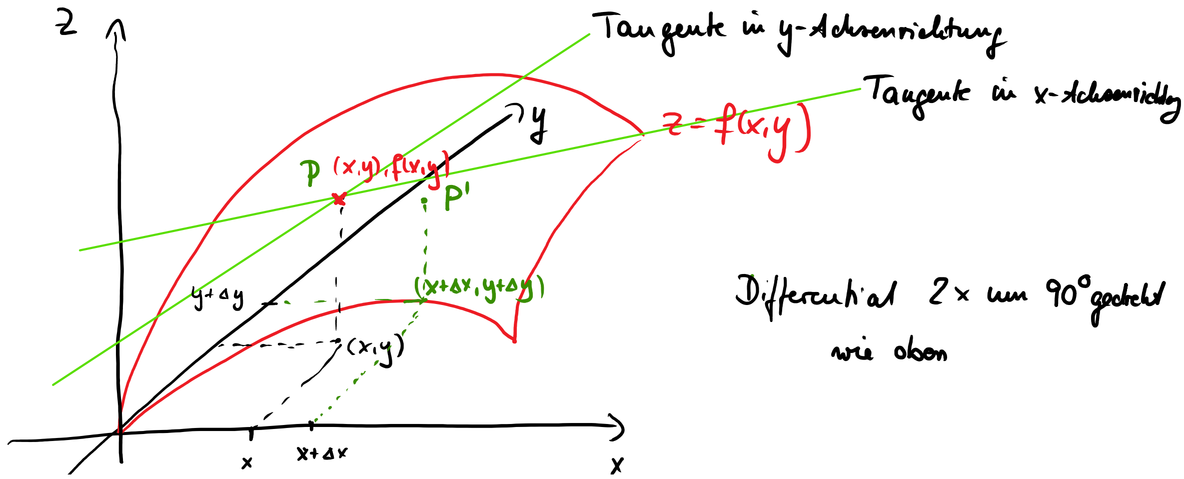
Man setzt: $df = f'(x)\cdot dx$

Differential der Funktion $y=f(x)$,

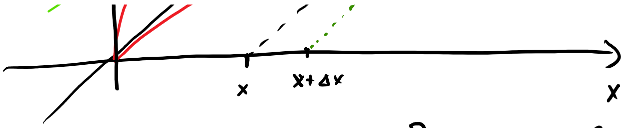
dx = Differential der Variablen x

$f'(x) = \frac{df}{dx}$ = Differentialquotient

Situation bei Funktionen mit 2 unabh. Variablen



Differential 2× um 90° gedreht wie oben



Def: $f: D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ $\quad y = f(x_1, \ldots, x_n)$

$$d_{x_i} f = f_{x_i} \, dx_i$$ partielle Differential der Funktion f nach der Variablen x_i

Vorbemerkungen zum totalen Differential

Ziel: Wie kann ich eine Funktionswertänderung annähernd berechnen durch Verwenden einer linearen Funktion?

1) $y = f(x)$ Gleichung der Tangente in $(x_0, f(x_0))$

$y = mx + b$

Im Berührpunkt gilt: $y' = f'(x_0) = m$

Also gilt: $y_0 = m x_0 + b \Rightarrow b = y_0 - m x_0$

$\Rightarrow b = y_0 - f'(x_0) \cdot x_0$

Tangentengleichung: $y = \underbrace{f'(x_0)}_{m} x + \underbrace{y_0 - f'(x_0) \cdot x_0}_{b}$

$$\boxed{y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)}$$

2) Bestimmung der Gleichung der Tangentialebene im Punkt $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) = P(x_0, y_0, z_0)$

Gegeben $z = f(x, y)$

Allgemeine Ebengleichung: $z = ax + by + c$

Es gilt: Im Berührpunkt gilt $z_x = a = f_x(x_0, y_0)$

$z_y = b = f_y(x_0, y_0)$

Steigung Tangentialebene = Steigung (part. Abl.) der Fkt.

Der Berührpunkt liegt auf der Tangentialebene:

$z_0 = a x_0 + b y_0 + c \Rightarrow c = z_0 - a x_0 - b y_0$

Umformen: $\Rightarrow c = z_0 - f_x(x_0, y_0) x_0 - f_y(x_0, y_0) y_0$

$$\boxed{z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)}$$

Damit ergibt sich für die Linearisierung im 3D-Raum:

$$\boxed{dz = f_x(x_0, y_0)\, dx + f_y(x_0, y_0)\, dy}$$ totale oder vollständige Differential

Abstand vom Funktionswert zum Wert des "verschobenen" Punktes, der sich auf der Tangentialebene ergibt

Def: $z = f(\underbrace{x_1, \ldots, x_n}_{n})$ (n unabh. Variablen)

Def: $z = f(x_1, \dots, x_n)$ (n unabh. Variablen)

$$dz = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x_1, \dots x_n)\, dx_i = f_{x_1} dx_1 + f_{x_2} dx_2 + \dots + f_{x_n} dx_n$$

Allgemein auch hier: Linearisung

Bp: 1) $z = f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$

Das totale Differential lautet:

$$z_x = \frac{1}{x^2+y^2} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2+y^2}$$

$$z_y = \frac{1}{x^2+y^2} \cdot 2y = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$dz = \frac{2x}{x^2+y^2} \cdot dx + \frac{2y}{x^2+y^2} \cdot dy$$ totale Differential

Berechnen Sie näherungsweise die Funktionswertänderung, falls in Def.ebene der Punkt (2,1) in den Punkt (2,5; 1.75) verschoben wird

$dx = 0.5 \quad dy = 0.75$

$$dz = \frac{2 \cdot 2}{2^2+1^2} \cdot 0.5 + \frac{2 \cdot 1}{2^2+1^2} \cdot 0.75 = 0{,}7$$

$$\Delta z = \left| f(2,1) - f(2{,}5;\, 1.75) \right| = \left| \ln 5 - \ln(9{,}312) \right| = 0{,}62$$

2) $r(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ Abstand des Punktes zum Koord.ursprung

Wie ändert sich der Abstand, wenn $A(1,2,0) \longrightarrow B(0{,}9;\, 2{,}2;\, -0.1)$

Berechnung mit Hilfe des totalen Differentials:

$$dr = r_x(x,y,z)\,dx + r_y(x,y,z)\,dy + r_z(x,y,z)\,dz$$

$$dr = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot (-0{,}1) + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot 0{,}2 + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot (-0.1)$$

$$dr = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (-0.1) + \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot 0{,}2 + \frac{0}{\sqrt{5}} \cdot (-0.1)$$

$$dr = -\frac{0.1}{\sqrt{5}} + \frac{0.4}{\sqrt{5}} \approx 0{,}1342$$

Zum Vergleich: $\Delta r = \left| r(1,2,0) - r(0{,}9;\, 2{,}2;\, -0{,}1) \right|$

$= 0.143$

ÜA für zu Hause: 1) $z(x,t) = \frac{t^2 + x}{2t - 4x}$ 2) $f(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} \cdot x_2^{\beta}$

jeweils das totale Differential bilden!