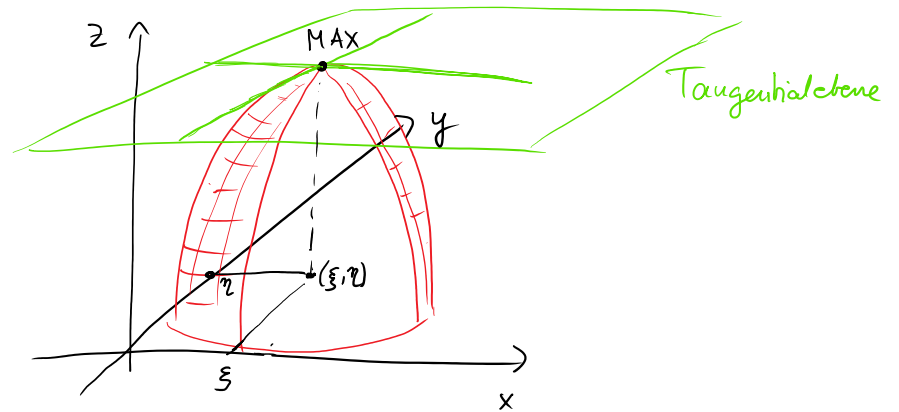


Vorl

Vorlesung 15.6.2022

Extremwerte von Funktionen mit mehreren unabh. Variablen



Notwendige Bedingungen für die Existenz eines Extremwertes für $z = f(x, y)$

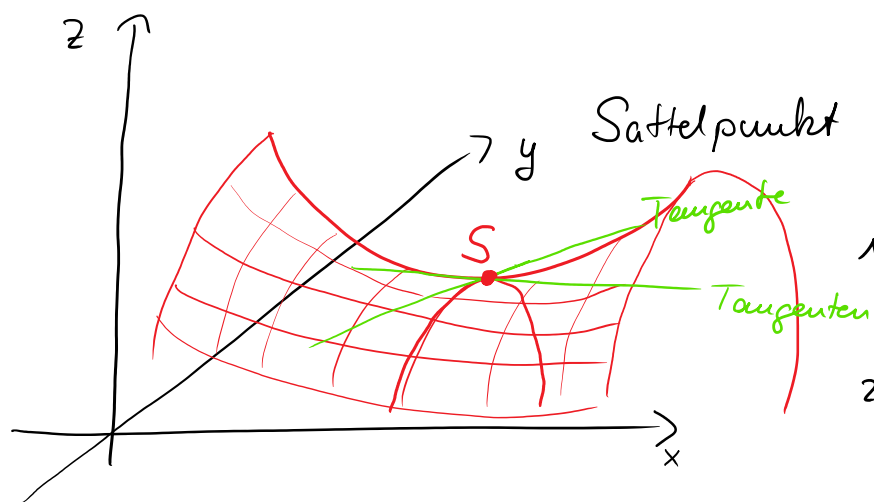
Für den Kandidaten (x_0, y_0) muss gelten:

$$f_x(x_0, y_0) = 0$$

$$f_y(x_0, y_0) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{falls } n \text{ unabh. Variablen:} \quad x^* \text{ Kandidat} \\ f_{x_1}(x^*) = f_{x_2}(x^*) = \dots = f_{x_n}(x^*) \end{array} \right]$$

Was kann noch eintreten, falls alle part. Ableitungen verschwinden?



1. Tangente
an Minimum der
Schnittkurve
2. Tangente an Maximum
der anderen Schnittkurve

hinreichende Bedingung für $z = f(x, y)$ Kandidat: (x_0, y_0)

$$\Delta(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) > 0$$

$$\Delta(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} \quad \text{Determinante}$$

Falls $\Delta(x_0, y_0) < 0$ Sattelpunkt
 $\Delta(x_0, y_0) = 0$ keine Entscheidung möglich

Sei $z = f(x_1, \dots, x_n)$ Fkt. mit n unabh. Variablen

$\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ ist Extremwert $\Leftrightarrow$

1) notwendig:
 $\text{grad}_f(\bar{x}) = 0$ (sämtliche partielle Abl. sind $= 0$)

2) hinreichend:
 $H(\bar{x}) = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(\bar{x}) & f_{x_1 x_2}(\bar{x}) & \dots & f_{x_1 x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & & & \\ f_{x_n x_1}(\bar{x}) & f_{x_n x_2}(\bar{x}) & \dots & f_{x_n x_n}(\bar{x}) \end{pmatrix}$ Hesse'sche Matrix

$$\text{Sei } H_i = \begin{vmatrix} f_{x_1 x_1}(\bar{x}) & \dots & f_{x_1 x_i}(\bar{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_i x_1}(\bar{x}) & \dots & f_{x_i x_i}(\bar{x}) \end{vmatrix} \quad i = 1, \dots, n$$

Hauptunterdeterminante

Dann gilt: $\bar{x}$ lokales Maximum $\Leftrightarrow H_1 < 0, H_2 > 0, H_3 < 0, \dots$

$$H_n = \begin{cases} < 0, & n \text{ ungerade} \\ > 0, & n \text{ gerade} \end{cases}$$

$\bar{x}$ lokales Minimum $\Leftrightarrow H_1 > 0, H_2 > 0, H_3 > 0, \dots, H_n > 0$

Permanenzprinzip in der Mathematik:

Die Kriterien sind für $n=1$ bekannt aus dem WS.

Bp: $z = f(x, y) = x^3 - 12xy + 6y^2$ Zu bestimmen:

Extremwerte, evtl. Sattelpunkte

$$f_x = 3x^2 - 12y = 0 \quad \text{I}$$

$$f_y = -12x + 12y = 0 \quad \text{II}$$

Aus II: $-12x + 12y = 0 \quad | +12x$
 $12y = 12x \quad | :12$
 $y = x \quad (*)$

$(*)$ in I: $3x^2 - 12x = 0 \quad | :3$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-4) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad \text{bzw.} \quad x_2 = 4$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 4 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 0 \text{ und } y_2 = 4$$

Kandidaten: $(0,0)$ oder $(4,4)$

Hinreichende Bedingungen aufstellen und ausrechnen:

$$f_{xx}(x,y) = 6x \quad f_{xy} = f_{yx} = -12 \quad f_{yy}(x,y) = 12$$

$$\Delta(x,y) = 6x \cdot 12 - 12^2 = 72x - 144$$

$$\Delta(0,0) = -144 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Bei } (0,0) \text{ liegt ein Sattelpunkt vor}$$

$$\Delta(4,4) = 72 \cdot 4 - 144 = 288 - 144 = 144 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Extremwert}$$

$$H_1 = |f_{xx}(4,4)| = 6 \cdot 4 = 24 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Minimum bei } (4,4, f(4,4))$$

ÜA für zu Hause:

Gesucht werden Extremwerte und Sattelpunkte von

$$z = f(x, y) = x - 8y - x^2 + x \cdot y - y^2$$

(Lösung: Max. bei $(-2, -5)$)

$$2) f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1^3 - 3x_1} - x_2^2 + x_2 \cdot x_3 - x_3^2 + 3x_3$$

Notwendige Bedingungen aufstellen:

$$\text{I} : f_{x_1}(x_1, x_2, x_3) = (3x_1^2 - 3) \cdot e^{x_1^3 - 3x_1} = 0$$

$$\text{II} : f_{x_2}(x_1, x_2, x_3) = -2x_2 + x_3 = 0$$

$$\text{III} : f_{x_3}(x_1, x_2, x_3) = x_2 - 2x_3 + 3 = 0$$

$$\text{Aus I} : 3x_1^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x_1^2 = 3 \Rightarrow x_1^2 = 1 \Rightarrow x_1 = 1 \text{ oder } x_1 = -1 \quad (e\text{-Fkt} \neq 0)$$

$$\text{Aus II} : x_3 = 2x_2 \quad (*) \quad \text{in III} : x_2 - 2 \cdot 2x_2 + 3 = 0$$

$$\text{mit } (*) \quad x_3 = 2 \cdot 1 = 2 \quad \Leftrightarrow -3x_2 + 3 = 0 \Rightarrow 3x_2 = 3 \Rightarrow x_2 = 1$$

$$\text{Kandidaten} : x_{E_1} = (1, 1, 2) \quad x_{E_2} = (-1, 1, 2)$$

hinreichende Bedingungen auswerten:

$$\overset{\text{Prod.-regel, Kettenregel}}{\downarrow} f_{x_1 x_1} = 6x_1 \cdot e^{x_1^3 - 3x_1} + (3x_1^2 - 3)^2 \cdot e^{x_1^3 - 3x_1}$$

$$f_{x_1 x_2} = f_{x_2 x_1} = 0 \quad f_{x_2 x_3} = f_{x_3 x_2} = 1$$

$$f_{x_1 x_3} = f_{x_3 x_1} = 0 \quad f_{x_2 x_2} = -2 \quad f_{x_3 x_3} = -2$$

$$f_{x_1 x_1}(1, 1, 2) = 6 \cdot 1 \cdot e^{-2} + (3 \cdot 1^2 - 3)^2 \cdot e^{1^3 - 3} = 6e^{-2}$$

$$f_{x_1 x_1}(-1, 1, 2) = \dots = -6e^2$$

$$H_3(1, 1, 2) = \begin{vmatrix} 6e^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \dots = 18e^{-3} > 0$$

Entwickeln
nach Spalte 1

$$H_2(1, 1, 2) = \begin{vmatrix} 6e^{-2} & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -12e^{-2} < 0$$

$$H_1(1, 1, 2) = 6e^{-2} > 0$$

$$\text{für } x_{E_1}: H_3 > 0, \boxed{H_2 < 0}, H_1 > 0$$

keine Aussage möglich

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 4 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 0 \text{ und } y_2 = 4$$

Kandidaten: $(0,0)$ oder $(4,4)$

Hinreichende Bedingungen aufstellen und ausrechnen:

$$f_{xx}(x,y) = 6x \quad f_{xy} = f_{yx} = -12 \quad f_{yy}(x,y) = 12$$

$$\Delta(x,y) = 6x \cdot 12 - 12^2 = 72x - 144$$

$$\Delta(0,0) = -144 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Bei } (0,0) \text{ liegt ein Sattelpunkt vor}$$

$$\Delta(4,4) = 72 \cdot 4 - 144 = 288 - 144 = 144 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Extremwert}$$

$$H_1 = |f_{xx}(4,4)| = 6 \cdot 4 = 24 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Minimum bei } (4,4, f(4,4))$$

$$H_3(-1, 1, 2) = \begin{vmatrix} -6e^2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{\text{Entw.} \\ \text{nach 1. Zeile}}}{=} -18e^2 < 0$$

$$H_2(-1, 1, 2) = \begin{vmatrix} -6e^2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 12e^2 > 0$$

$$H_1(-1, 1, 2) = -6e^2 < 0$$

Es gilt für x_{E_2} : $H_3 < 0$ $H_2 > 0$ $H_1 < 0$
 $\Rightarrow$ lokales Maximum