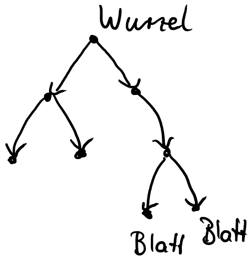
Vorlesung 29.6.2022

Graphentheorie

Def: Höhe eines Wurzelbaum

Bp.:



Anzahl der durchlaufenen Kanten: 3

Anzahl der durchlaufenen Knoten: 4

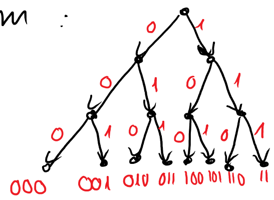
Def: (Binärbaum)

Ein Wurzelbaum, bei dem jeder Knoten höchstens zwei Nachfolger hat

Wurzel hat Eingangsgrad: 0

die nachfolgenden Knoten haben Eingangsgrad: 1

Vollständiger Binärbaum:



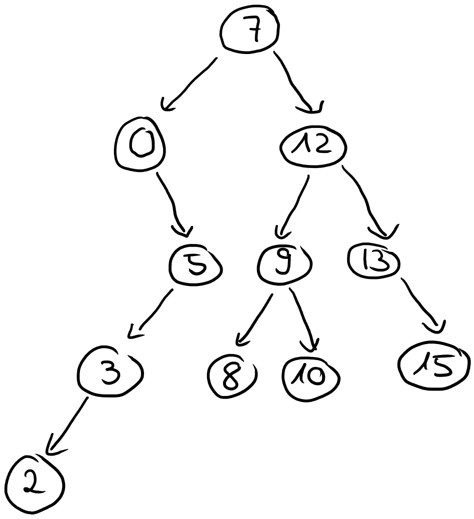
Höhe H: $H=4$ Anzahl Knoten

Anzahl der Knoten 2^H-1
im vollständ. Binärbaum

Wo findet man Binärbäume?

Informatik: Binäre Suchbäume (BST Binary Search Tree)

Bp: [7, 12, 0, 5, 9, 3, 8, 2, 13, 10, 15, 1]



Suche 3

Vergleich 3 mit Wurzelknoten

$3 < 7$

Suche im linken Teilbaum

$3 > 0$

Suche im rechten Teilbaum

$3 < 5$

Suche im linken Teilbaum

$3 = 3$ ZIEL ERREICHT

Umfang der Suche:

In einem Baum der Höhe H benötigt man maximal $V = H$ Vergleiche

Frage: Wieviele Einträge sind bei 10 Vergleichen speicherbar?

Antwort: $1023 = 2^{10} - 1$ Anzahl der Einträge = Anzahl der Knoten

Huffman-Code (1952) (David A. Huffman 1925–1999)

primäre Idee: häufig vorkommende Zeichen durch möglichst kurze Code-Wörter zu codieren (in Sprache: e)

Foderung: präfixfreier Code: kein Codewort ist Beginn eines anderen Codeworts

Bp: 0, 10, 11 präfixfrei

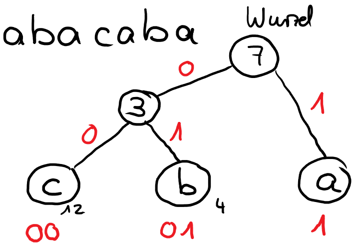
0, 01, 10 nicht präfixfrei, da 0 in 01 enthalten

Textcodierung mit dem Huffman-Code:

1) Häufigkeit des Vorkommens der Zeichen feststellen
2) Darstellung in einem Binärbaum: Blätter sind die Zeichen
   Der Pfad von der Wurzel zum Blatt liefert den Code

Bp: abacaba

a	b	c
4	2	1



c : 00
b : 01
a : 1

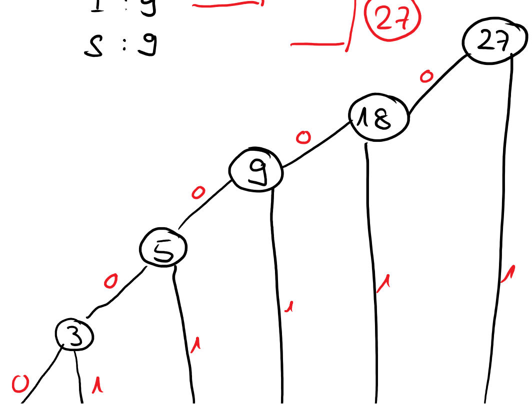
Aufgabe: Entschlüsseln Sie: 01110001011100 baacbbaac

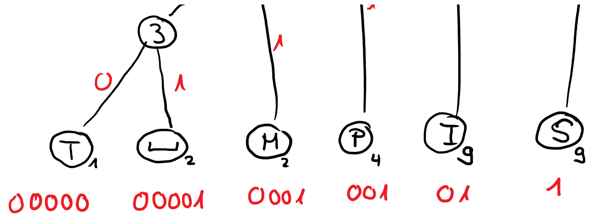
Bp: Bestimmen Sie den Huffman-Code von
MISSISSIPPI␣IST␣MISSISSIPPI

M	I	S	P	␣	T
2	9	9	4	2	1

Sortieren der Häufigkeit nach:

T : 1] 3	M : 2] 5	P : 4] 9
␣ : 2	T␣ : 3	M,T␣ : 5
M : 2	P : 4	I : 9] 18
P : 4	I : 9	S : 9] 27
I : 9	S : 9	
S : 9		



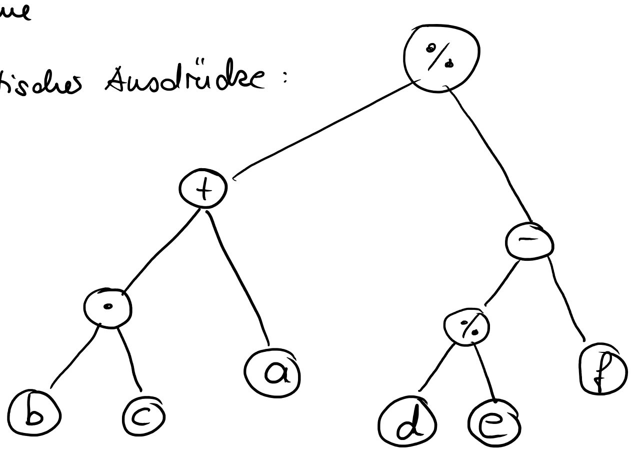


Entschlüsseln Sie: $\underbrace{0001}_{M}\underbrace{01}_{I}\underbrace{1}_{S}\underbrace{1}_{S}\underbrace{01}_{I}\underbrace{1}_{S}\underbrace{1}_{S}\underbrace{01}_{I}\underbrace{001}_{P}\underbrace{001}_{P}\underbrace{01}_{I}$

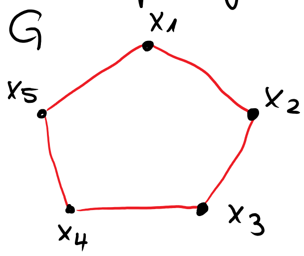
Weitere Beispiele für Binärbäume

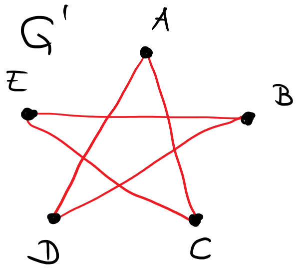
Darstellung arithmetischer Ausdrücke:

$$\frac{a+b\cdot c}{\frac{d}{e}-f}$$



Nachtrag: Isomorphe Graphen





Def: Zwei Graphen heißen isomorph, wenn es eine bijektive Abbildung φ von der Knotenmenge des einen Graphen G in die Knotenmenge G' gibt, mit $\{x_i, x_j\}$ Kante von G $\Leftrightarrow$ $\{\varphi(x_i), \varphi(x_j)\}$ Kante von G'

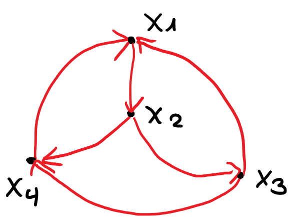
Für das Bp kann folgende Abb. definiert werden:

$\varphi(x_1) = A \quad \varphi(x_2) = C \quad \varphi(x_3) = E \quad \varphi(x_4) = B \quad \varphi(x_5) = D$

Nachtrag zu den Adjazenzmatrizen (von gerichteten Graphen)

Mit Hilfe der Potenzen $A^r = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{r\text{mal}}$ lassen sich Aussagen über die Existenz und über die Anzahl von Wegen der Länge r in einem Digraphen machen

Bp:



$$A = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

hier abzulesen: die Anzahl der Wege der Länge 1 von x_i nach x_j

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \overset{A^2}{\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline \end{array}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1 Weg der Länge 2 von x_2 nach x_4

2 Wege der Länge 2 von x_2 nach x_1

Bem: Falls der Digraph einen Zyklus, dann wird A^r niemals die Nullmatrix werden

Bem: Ein Digraph mit n Knoten ist genau dann azyklisch (= zyklenfrei) Wenn es eine Zahl r gibt mit $1 \leq r \leq n$ mit $A^r \neq \underset{\text{Nullmatrix}}{O}$ und $A^s = O$ für $s > r$