Vorlesung 4.7.2022

Weiter mit Graphentheorie

Durchlaufen von Graphen

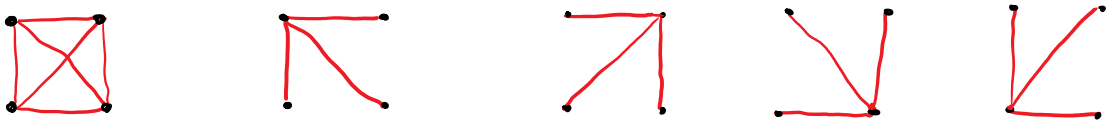
Def: aufspannender Baum, Gerüst

Ein zusammenhängender Teilgraph eines zusammenhängenden Graphen mit minimaler Kantenzahl heißt aufspannender Baum, Gerüst oder Spannbaum

Bem: Knotenzahl bleibt gleich!

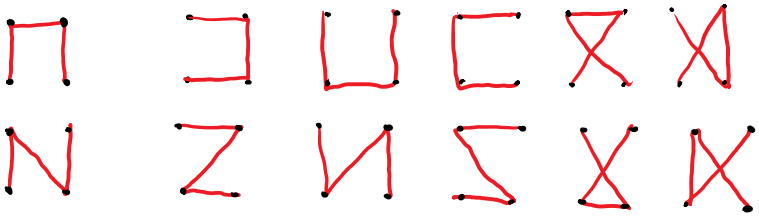
Bem: Ein aufspannender Baum enthält keinen Zyklus

Aufgabe: Wie viele Spannbäume gibt es in einem vollständigen Graphen mit 4 Knoten



Cayley-Formel: Ein vollständiger Graph mit n Knoten hat n^{n-2} aufspannende Bäume

hier: $n = 4$, also $4^{4-2} = 4^2 = 16$ aufsp. Bäume



Aufspannende Bäume bei bewerteten Graphen

Def: Minimal aufspannender Baum (MST)

Minimum Spanning Tree

Sei T ein aufspannender Baum eines bewerteten Graphen
T heisst MST, wenn die Summe seiner Kantenbewertungen minimal ist.

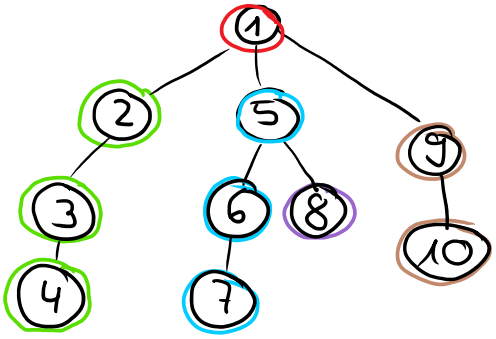
Vorab: Suchalgorithmen allgemein

1) Tiefensuche:

Startknoten festlegen

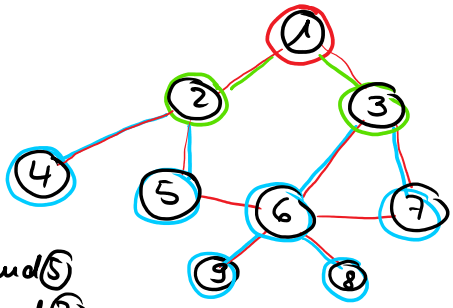
hier: ①

Nachfolger ② markieren
" ③ markieren
" ④ markieren
↓ kein Nachfolger, also zurück nach ③
⑤ → ⑥ → ⑦ markieren
↑ k.NF
zurück nach ⑤
⑧ markieren
↑ k.NF
zurück nach ①
⑨ → ⑩ markieren



2) Breitensuche

Startknoten festlegen ①
Markiere ② und ③ (Breite!)
Markiere bei ② Knoten ④ und ⑤
bei ③ " ⑥ und ⑦
Markiere bei ⑥ " ⑨ und ⑧

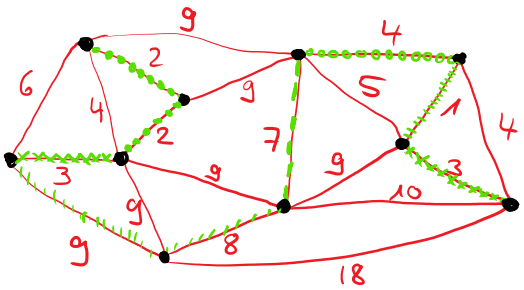


Frage: Wie findet man einen minimal aufspannenden Baum?

Antwort: Algorithmus von Kruskal (Joseph Kruskal (1928-2010)) (1956)

Anzuwenden bei ungerichteten bewerteten Graphen

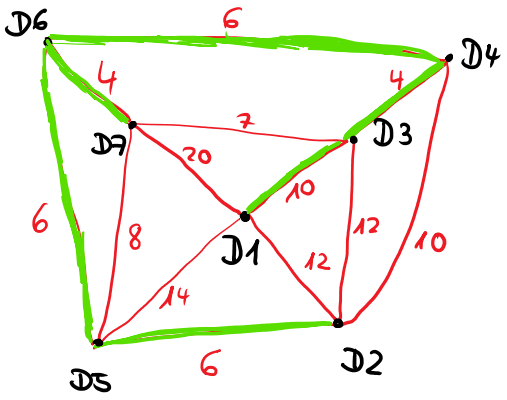
Bp:



1) Suche die Kante mit dem kleinsten Gewicht, falls die Kante mit bereits markierten Kanten einen Zyklus bildet, dann verwerfen
2) So oft wiederholen, bis nichts mehr hinzugefügt werden kann.

Bp: Sieben Dörfer sollen mittels Straßen verbunden werden, dabei sollen die Kosten möglichst gering gehalten werden

	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7
D1	0	12	10	0	14	0	20
D2	12	0	12	10	6	0	0
D3	10	12	0	4	0	0	7
D4	0	10	4	0	0	6	0
D5	14	6	0	0	0	6	8
D6	0	0	0	6	6	0	4
D7	20	0	7	0	8	4	0



Die Summe der Kantenbewertungen:
36

Bestimmung kürzester und längster Wege in Graphen

hier: Aufsuchen "kürzester" Wege

- Aufsuchen der kürzesten Wege von einem vorgegebenen Knoten zu allen übrigen Knoten des Graphen

  "single source shortest paths"

- Aufsuchen der kürzesten Wege zwischen je zwei Knoten in einem Graphen

  "all pairs shortest paths"

Hier: Die Bestimmung der kürzesten Wege in einem Graphen:

Markierungsalgorithmus von Dijkstra (greedy-Algorithmus) (1959)

Edsger W. Dijkstra (1930–2002)

Auffinden kürzester Wege von einem Knoten aus

Grundidee: wähle immer diejenige Kante aus, die vom Startknoten aus immer den kürzesten Weg (Summe der Kantenbewertungen bis zum betreffenden Schritt minimal) liefert.

Allgemeine Kurzbeschreibung des Algorithmus:

Geg: $G(M, K, V, f)$ mit $f(k) \geq 0$ für alle $k \in K$ (alle Kanten positiv bewertet)

(1) Markiere x_0 (Startknoten) $D(x_0) = 0$
Setze $i = 1$, $M_1 := \{x_0\}$ weiter mit (2)

(2) Sei M^* die Menge aller Knoten x_s der Kanten (x_r, x_s) deren Knoten x_r in M_i liegt
$M^* = \{ x_s \in M \setminus M_i \mid$ es gibt eine Kante (x_r, x_s) mit $x_r \in M_i \}$
Falls $M^* = \emptyset$ weiter mit (6), falls $M^* \neq \emptyset$, weiter mit (3)

(3) Bestimme zu jedem $x_s \in M^*$ eine vorläufige Markierung
$D^*(x_s) = \min (D(x_r) + f(x_r, x_s))$ weiter mit (4)

(4) Ermittle aus den unter (3) gelisteten kürzesten Entfernungen den Knoten $x_s^* := x_i$ mit $D(x_i) = D^*(x_i)$ (mit der minimalsten Entfernung)
Markiere Kante (x_r, x_i)
weiter mit (5)

(5) Setze $M_{i+1} := M_i \cup \{x_i\}$ und $i := i+1$

weiter mit (2)

(6) Ende, wenn alle Knoten markiert sind.

Am Mittwoch, den 6.7. Dijkstra an einem Beispiel