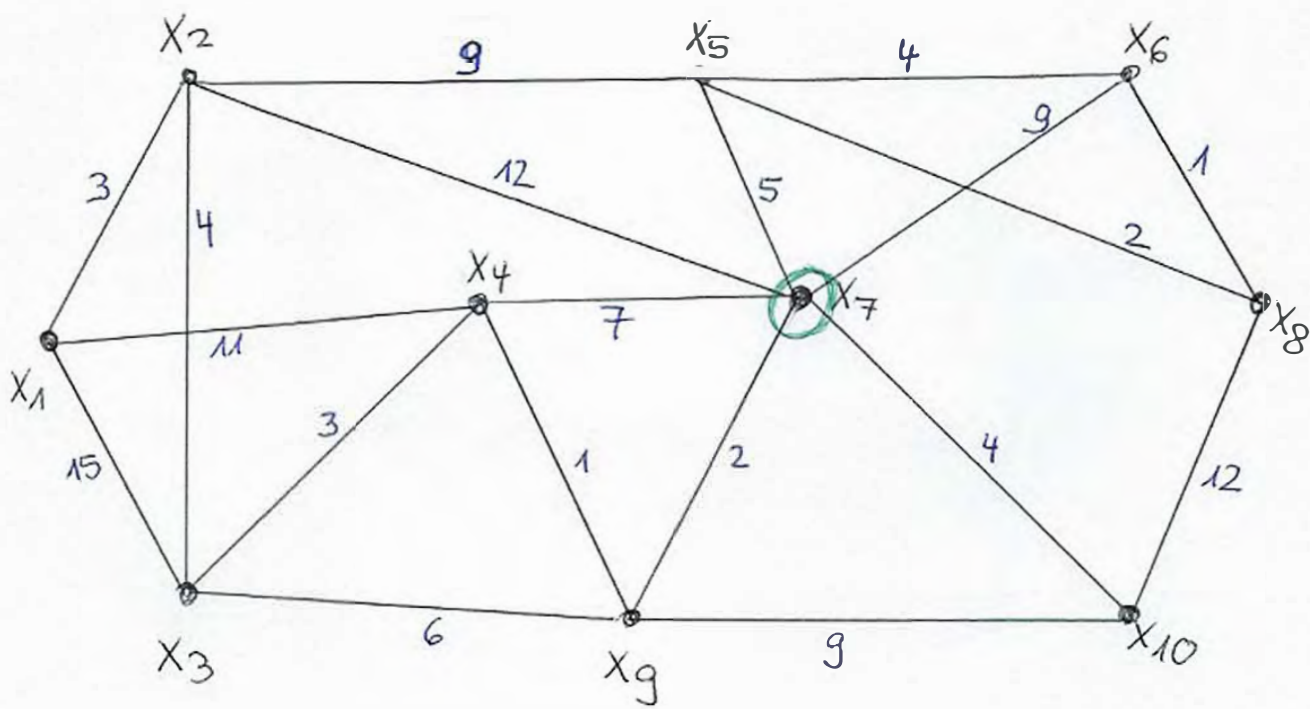




Schritt (1): $D(x_7) = 0$ $M_1 := \{x_7\}$

Iteration 1: (2) $M^* = \{x_2, x_4, x_5, x_6, x_9, x_{10}\}$ Menge der zu x_7 benachbarten Knoten.

(3) Ermittlung der Entfernungen $D^*(x_s)$, $x_s \in M^*$

x_s	x_2	x_4	x_5	x_6	x_9	x_{10}
$D^*(x_s)$	12	7	5	9	<u>2</u>	10

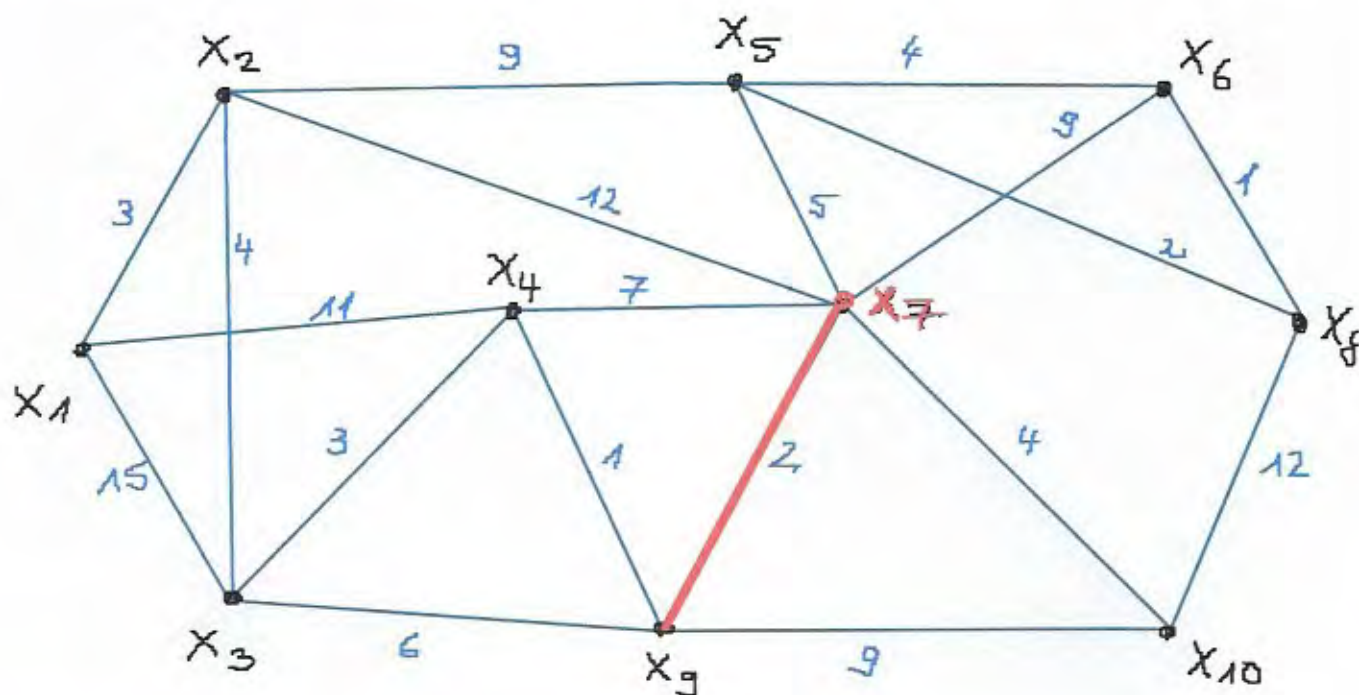
Die kürzeste Entfernung von x_7 ist die nach x_9

Setze $D(x_9) = 2$

(4) Markiere im Graphen die Kante (x_7, x_9)

(5) $M_2 := M_1 \cup \{x_9\} = \{x_7, x_9\}$

Graph nach der ersten Iteration:



Iteration 2:

$$(2) M^* = \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_{10}\}$$

Menge der zu x_7 und x_9 benachbarten Knoten.

- (3) Ermittlung der Entfernungen $D(x_s)$, $x_s \in M^*$ und zwar direkt oder über x_9 erreichbar, und zwar immer die kürzeste. Es sind folgende Fälle zu betrachten:
- $D^*(x_s) = f(x_7, x_s)$ falls x_s nur zu x_7 benachbart ist, also x_2, x_5, x_6 (x_4 z.B. kann auch über x_9 erreicht werden)
 - $D^*(x_s) = D(x_9) + f(x_9, x_s)$, falls x_s nur zu x_9 benachbart ist.
 - $D^*(x_s) = \min(f(x_7, x_s); D(x_9) + f(x_9, x_s))$, falls x_s zu x_7 und x_9 benachbart ist, also bei x_4 und x_{10}

Für x_4 ist $D^*(x_4) = \min(f(x_7, x_4); D(x_9) + f(x_9, x_4))$
 $= \min(7, 3) = 3$

x_9	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_{10}
$D^*(x_9)$	12	8	<u>3</u>	5	9	4

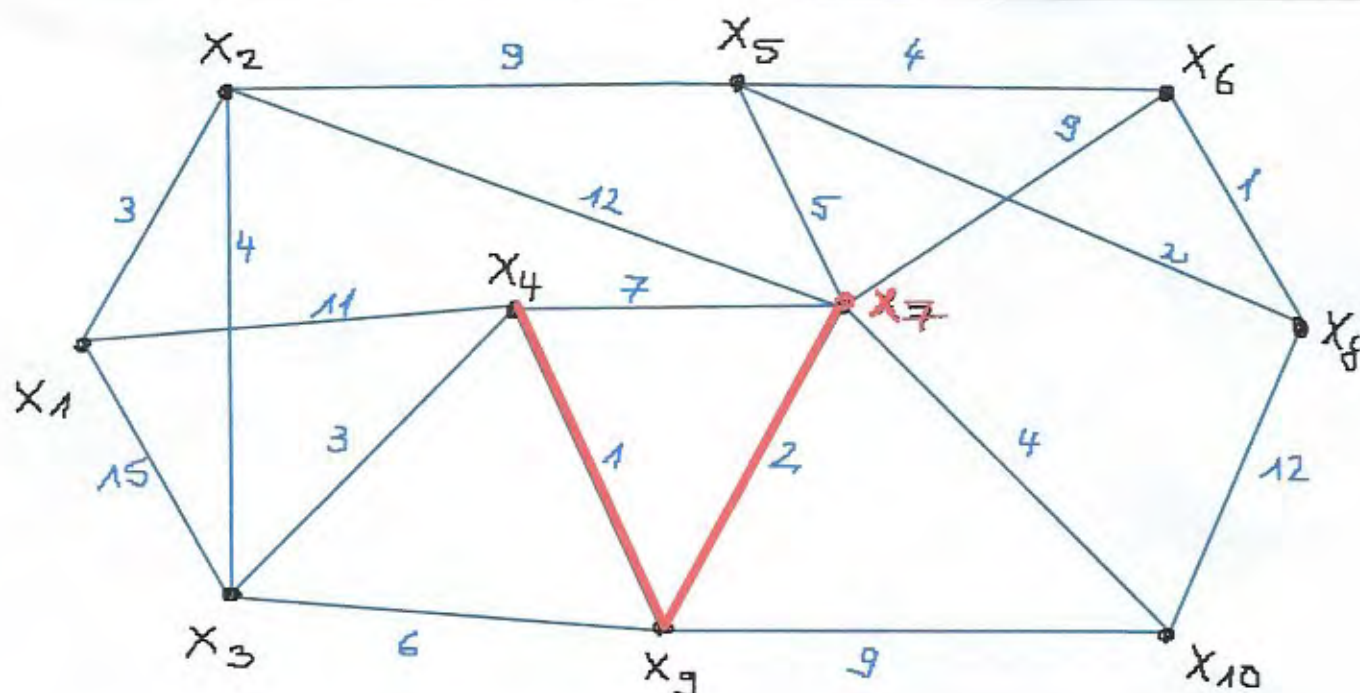
(2+6)

(4) Von allen aus M^* direkt oder über x_9 erreichbare Knoten von x_7 aus hat x_4 die geringste Entfernung.

Setze $D(x_4) = 3$

Markiere die Kante (x_9, x_4)

(5) $M_3 = M_2 \cup \{x_4\} = \{x_7, x_9, x_4\}$



Iteration 3

(2) $M^* = \{x_1, x_2, x_3, x_5, x_6, x_{10}\}$

alle zu x_7, x_9 und x_4 benachbarten Knoten.

(3) Für die Knoten $x_s \in M^*$ sind die direkt von x_7 und die über x_9 und x_4 ermittelbaren kürzesten Entfernungen zu machen:

Wir führen das exemplarisch für den Knoten x_3 durch:

1. Möglichkeit über x_4 : $D(x_4) + f(x_4, x_3) = 3 + 3 = 6$

2. Möglichkeit über x_9 : $D(x_9) + f(x_9, x_3) = 2 + 6 = 8$

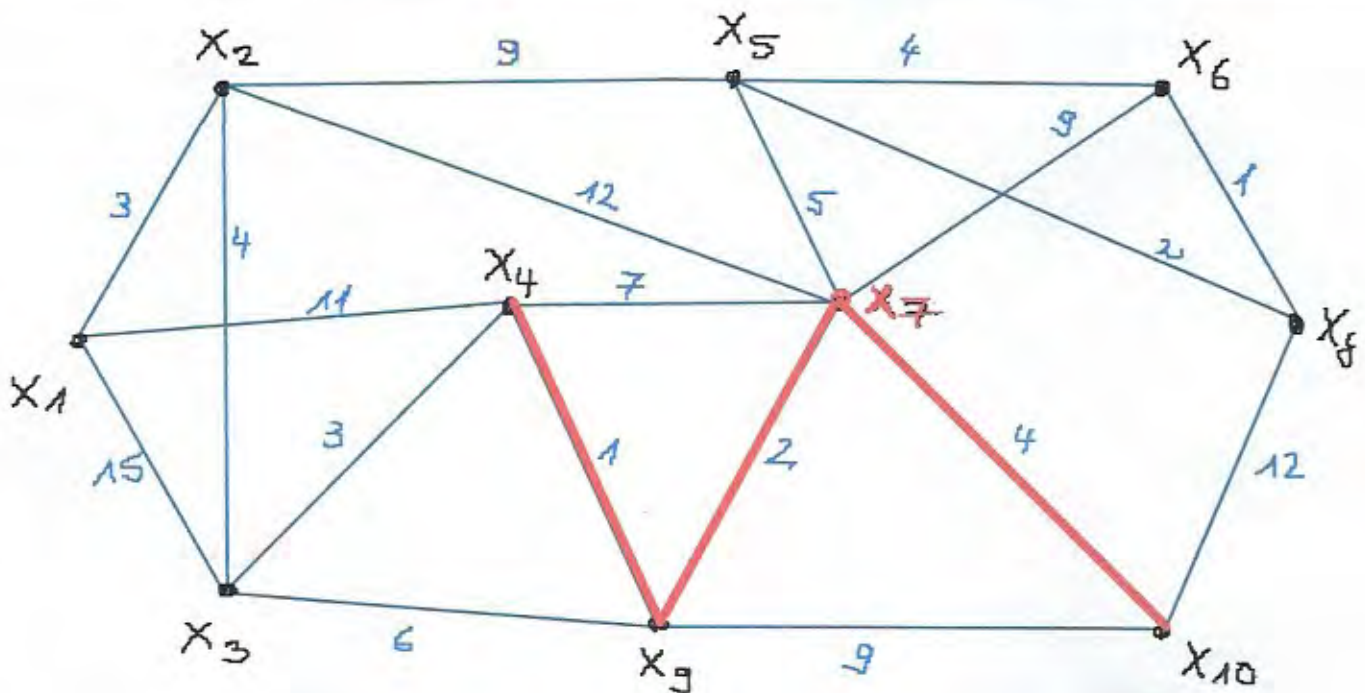
In diesem Beispiel sieht man, dass es wichtig ist, immer sämtliche möglichen Wege in aufsteigender Reihenfolge zu betrachten, da manchmal ein Weg über einen "Umweg" kürzer ist als der direkte Weg.

Wie für x_3 werden auch für $x_1, x_2, x_5, x_6, x_{10}$ die Entfernungen bewertet:

x_s	x_1	x_2	x_3	x_5	x_6	x_{10}
$D^*(x_s)$	14	12	6	5	9	<u>4</u>
	$2+1+11$		$2+1+3$			

(4) Es ist $D(x_{10}) = 4$ Markiere die Kante (x_7, x_{10})

(5) $M_4 = M_3 \cup \{x_{10}\} = \{x_7, x_9, x_4, x_{10}\}$



Iteration 4

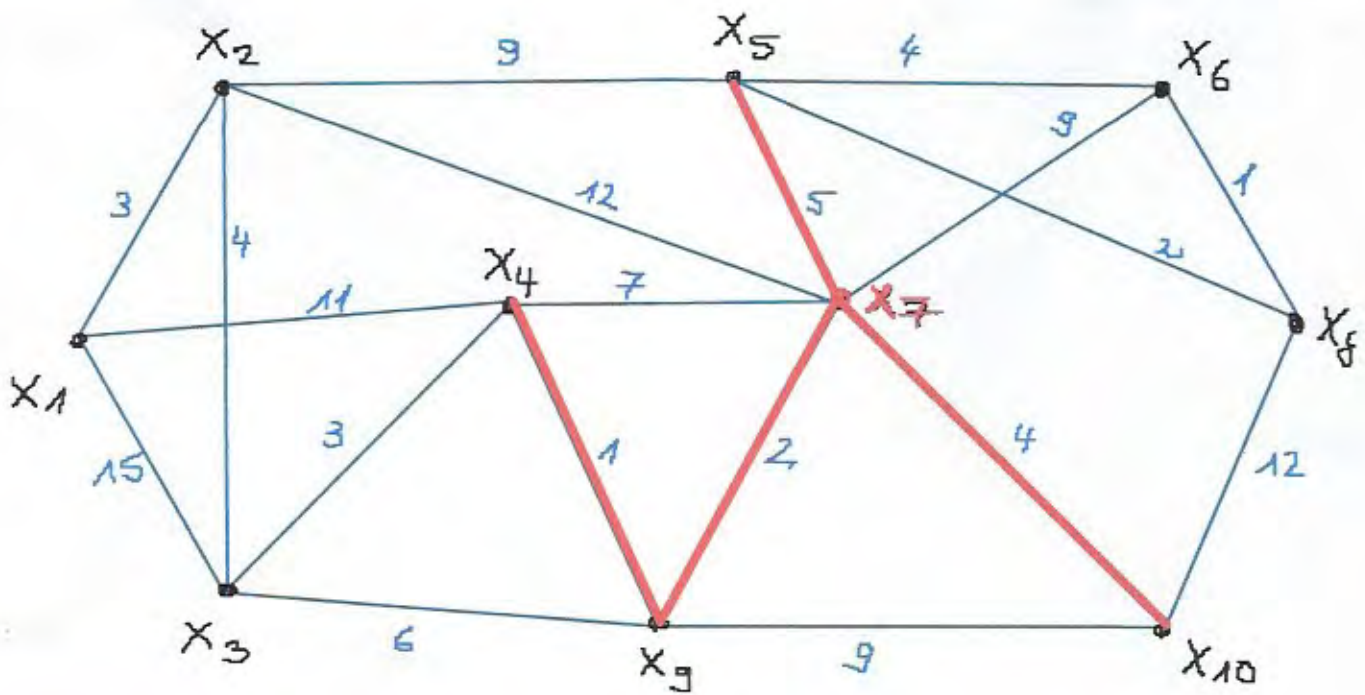
(2) $M^* = \{x_1, x_2, x_3, x_5, x_6, x_8\}$ benachbarte Knoten zu allen bereits bewerteten

(3) Für die Knoten $x_s \in M^*$ sind die direkt von x_7 und/oder über die anderen Knoten aus M_4 ermittelten kürzesten Entfernungen zu machen:

x_s	x_1	x_2	x_3	x_5	x_6	x_8
$D^*(x_s)$	14	12	6	5	9	16
	$1+2+11$		$2+1+3$	<u>5</u>		$4+12$

(4) Es ist $D(x_5) = 5$ Markiere die Kante (x_7, x_5)

(5) $M_5 = M_4 \cup \{x_5\} = \{x_7, x_9, x_4, x_{10}, x_5\}$



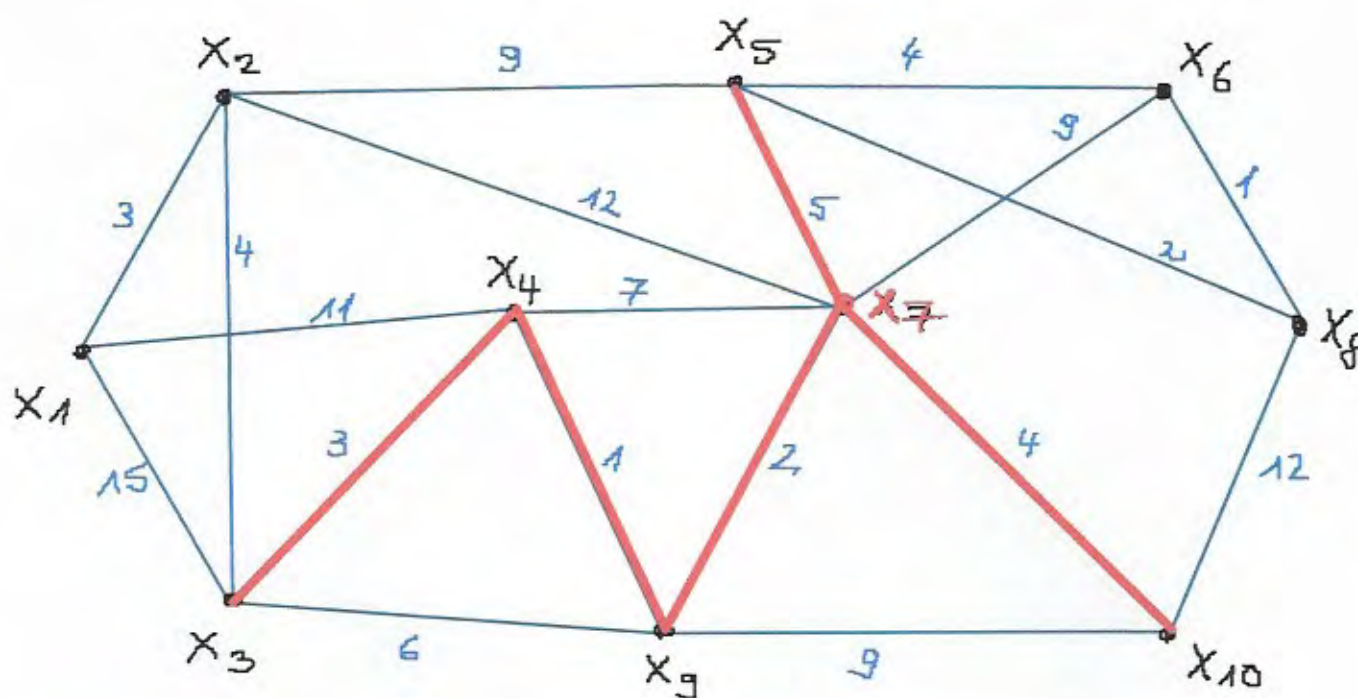
Iteration 5

(2) $M^* = \{x_1, x_2, x_3, x_6, x_8\}$ alle benachbarten Knoten zu M_5

x_s	x_1	x_2	x_3	x_6	x_8
$D^*(x_s)$	14	12	<u>6</u>	9	7
	$2+1+11$		$2+1+3$		$5+2$

(4) $D(x_3) = 6$ Markiere die Kante (x_4, x_3)

(5) $M_6 = M_5 \cup \{x_3\} = \{x_7, x_9, x_4, x_{10}, x_5, x_3\}$

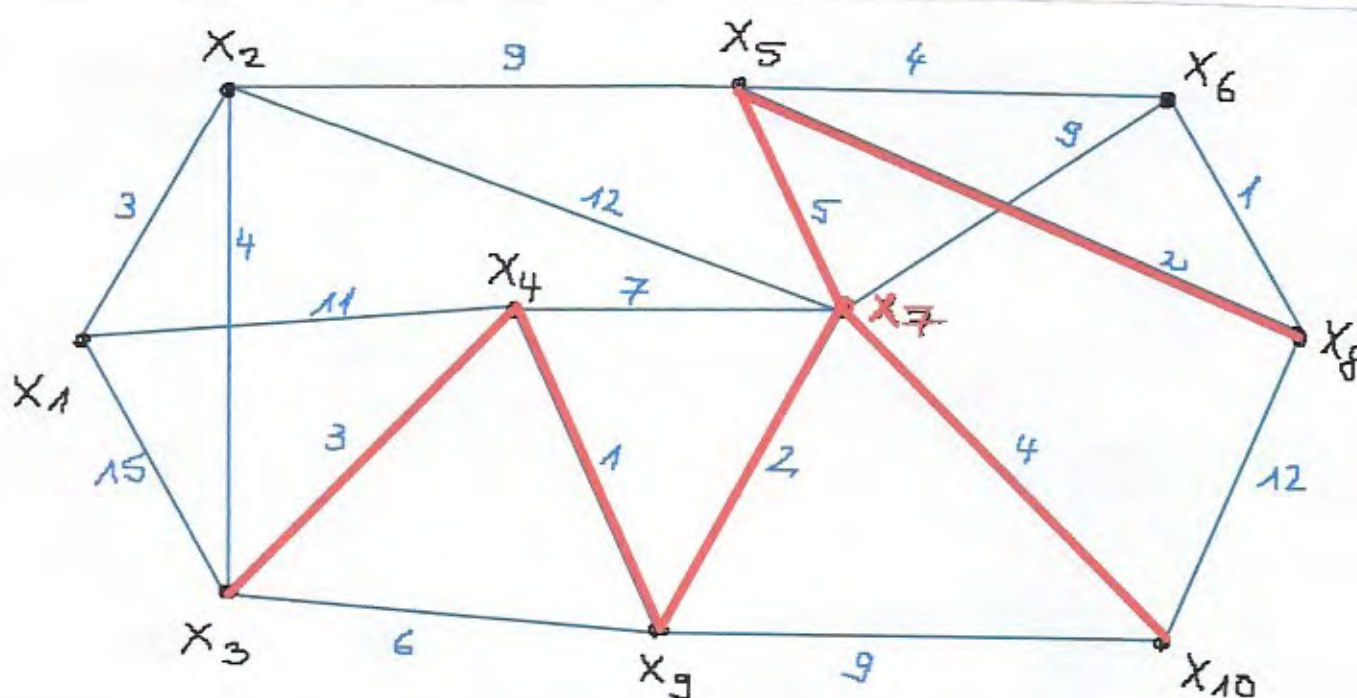


Iteration 6

(2) $M^* = \{X_1, X_2, X_6, X_8\}$ alle zu M_6 benachbarten Knoten

X_9	X_1	X_2	X_6	X_8
$D^*(X_9)$	14	10	9	<u>7</u>

(4) $D(X_9) = 7$ ^{$2+1+3+4$} Markiere die Kante (X_5, X_8) $M_7 = M_6 \cup \{X_8\}$
 $= \{X_3, X_4, X_5, X_7, X_8, X_9, X_{10}\}$

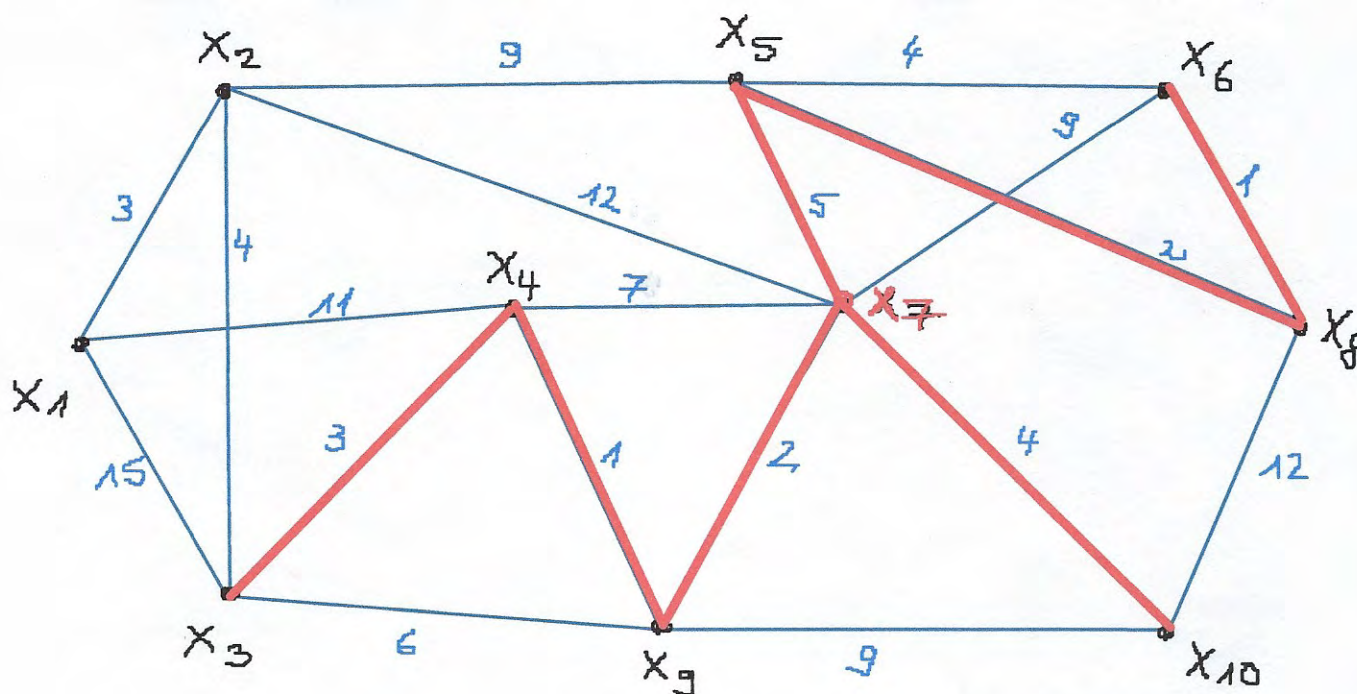


Iteration 7

(2) $M^* = \{X_1, X_2, X_6\}$ alle zu M_7 benachbarten Knoten

X_5	X_1	X_2	X_6
$D^*(X_5)$	14	10	<u>8</u>
	$2+1+11$	$2+1+3+4$	$5+2+1$

(4) $D(X_6) = 8$ Markiere die Kante (X_5, X_6) $M_8 = M_7 \cup \{X_6\}$



Iteration 8

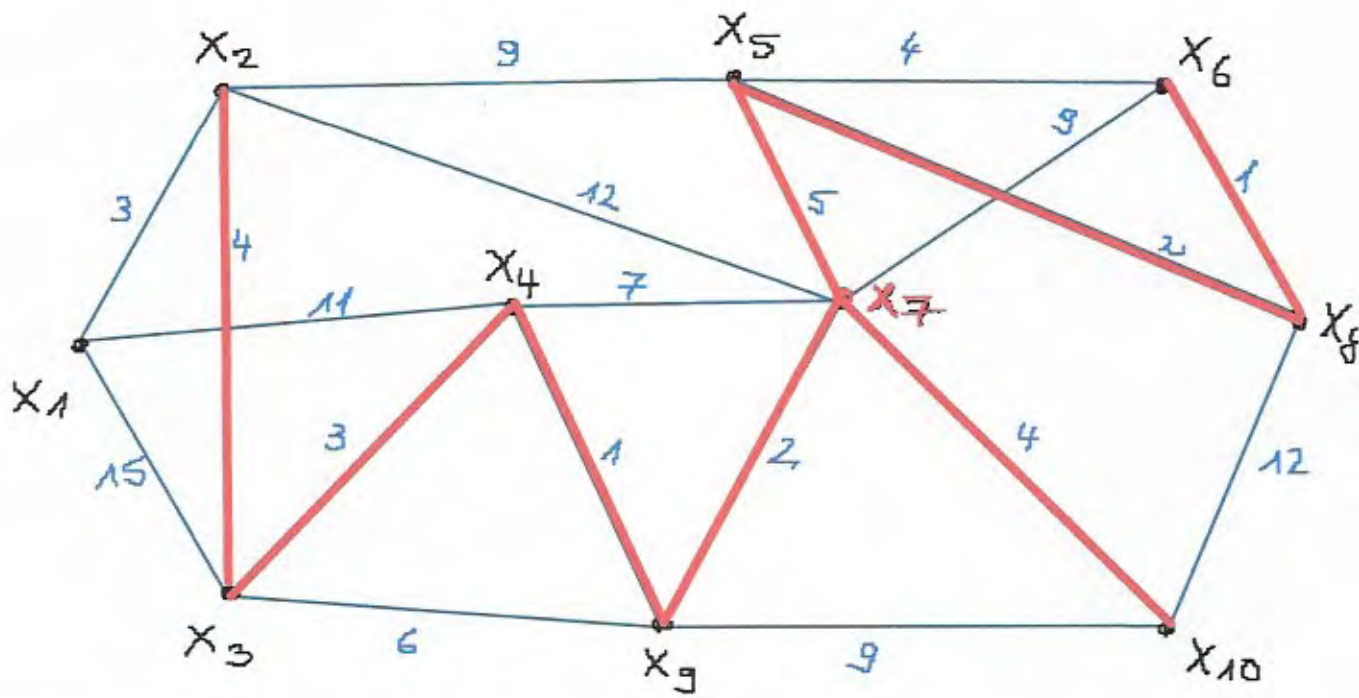
(2) $M^* = \{X_1, X_2\}$ alle zu M_8 benachbarten Knoten

X_3	X_1	X_2
$D^*(X_3)$	14	<u>10</u>
	$2+1+11$	$2+1+3+4$

(4) $D(X_2) = 10$

Markiere die Kante (X_3, X_2)

$$M_9 = M_8 \cup \{X_2\} = \{X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, X_{10}\}$$



Iteration 9

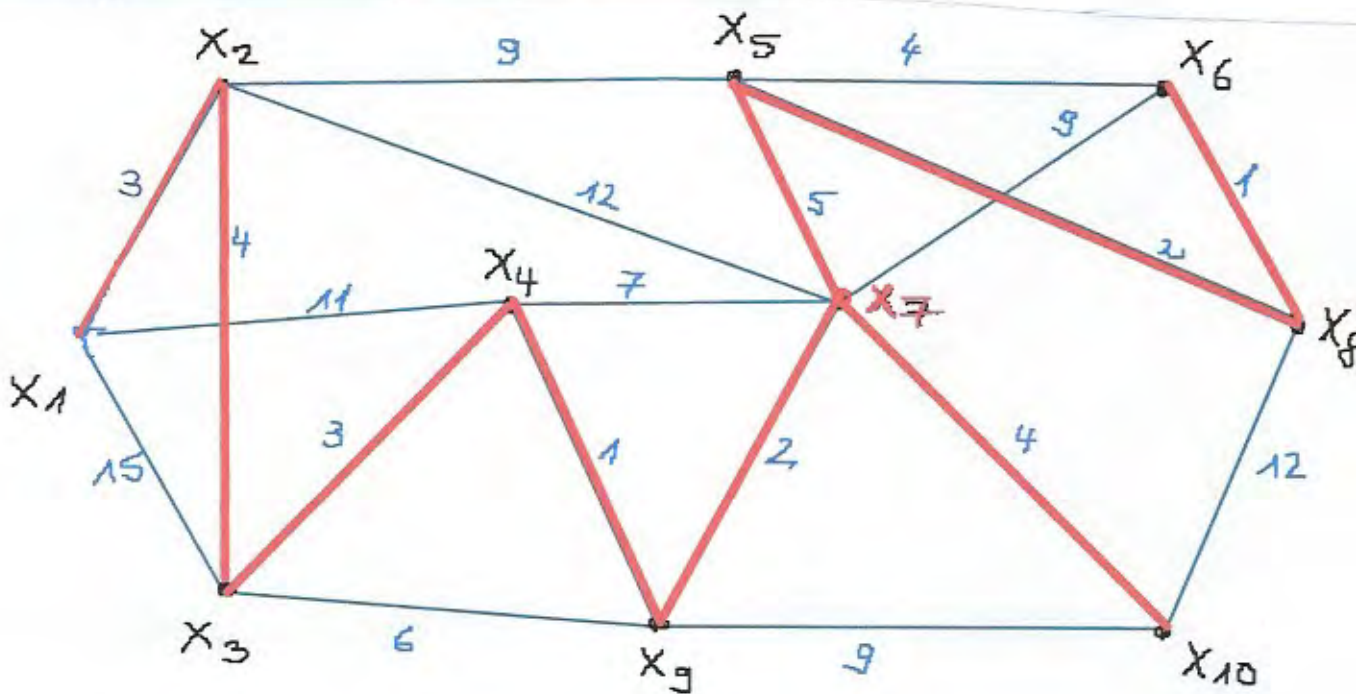
(2) $M^* = \{X_1\}$

(3)
$$\begin{array}{c|c} X_5 & X_1 \\ \hline D^*(X_5) & 13 \\ & \underline{2+1+3+4+3} \end{array}$$

(4) $D(X_1) = 13$

Markiere die Kante (X_2, X_1)

Damit sind alle Knoten markiert und der Algorithmus zu Ende.



Damit sind die kürzesten Wege vom Startknoten x_7 (125) aus zu allen anderen Knoten des Graphen ermittelt. Abschliessend kann man nochmals alle Bewertungen darstellen:

$$D(x_1) = 13 \quad (\text{Iteration 9})$$

$$D(x_2) = 10 \quad (\text{Iteration 8})$$

$$D(x_3) = 6 \quad (\text{Iteration 5})$$

$$D(x_4) = 3 \quad (\text{Iteration 2})$$

$$D(x_5) = 5 \quad (\text{Iteration 4})$$

$$D(x_6) = 8 \quad (\text{Iteration 7})$$

$$D(x_8) = 7 \quad (\text{Iteration 6})$$

$$D(x_9) = 2 \quad (\text{Iteration 1})$$

$$D(x_{10}) = 4 \quad (\text{Iteration 3})$$

$$x_7 \text{ Startknoten } D(x_7) = 0$$

Es wurde hier anhand des Beispiels der ausführlichste Weg beschrieben, von einem Startknoten aus die kürzesten Wege zu allen anderen Knoten des Graphen zu bestimmen. Häufig wird auch nur die Frage nach dem kürzesten Weg von einem Startknoten zu einem anderen Knoten des Graphen gestellt werden. Der Algorithmus ist dann beendet, wenn genau der gefragte Knoten markiert wurde.

Der Algorithmus von Dijkstra ist nicht nur auf ungerichtete Graphen anwendbar, sondern auch auf Digraphen.

Frage: Worauf muss hier geachtet werden?

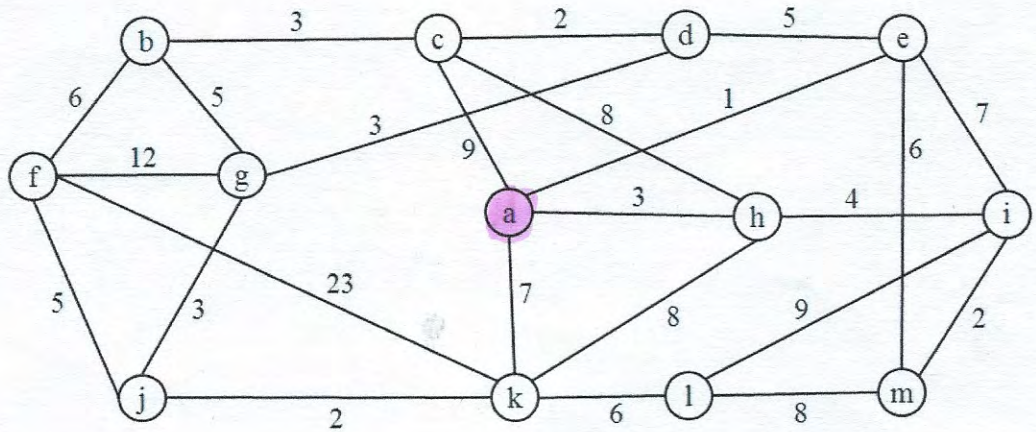
Antwort: Wege, die betrachtet werden dürfen nur in Pfeilrichtung durchlaufen werden.
(Stichwort: Einbahnstraße)

Zusammenfassung:

Mit dem Dijkstra-Algorithmus hat man die Regel, dass man immer derjenigen Kante vom Startknoten aus folgt, die den kürzesten Streckenabschnitt darstellt. Erst wenn alle kürzeren Abschnitte berücksichtigt worden, werden andere Kanten verfolgt. Das garantiert, dass bei Erreichen eines Knotens kein kürzerer Pfad existieren kann.

Aufgabe

Bestimmen Sie mit Hilfe des **Dijkstra-Algorithmus** die kürzesten Wege vom Knoten **a** zu allen anderen Knoten.



Lösung:

Start: $D(a) = 0$ $M_1 = \{a\}$

$M^* = \{c, k, e, h\}$ Menge der zu a benachbarten Knoten

Iteration 1:

x_s	c	k	e	h
$D^*(x_s)$	9	7	<u>1</u>	3

Markiere die Kante (a,e)
 $D(e) = 1$ $M_2 = \{a, e\}$

Iteration 2: $M^* = \{c, k, d, h, i, m\}$

x_s	c	k	d	h	i	m
$D^*(x_s)$	9	7	6	<u>3</u>	8	7

Markiere die Kante (a,h)
 $D(h) = 3$ $M_3 = \{a, e, h\}$

Iteration 3: $M^* = \{c, k, d, m, i\}$

x_s	c	k	d	m	i
$D^*(x_s)$	9	7	<u>6</u>	7	7

Markiere die Kante (e,d)
 $D(d) = 6$ $M_4 = \{a, e, h, d\}$

Iteration 4: $M^* = \{c, k, i, m\}$

x_s	c	k	i	m
$D^*(x_s)$	9	<u>7</u>	<u>7</u>	<u>7</u>

Markiere die Kanten
 (a,k), (h,i) und (e,m)
 $D(k) = 7$ $D(i) = 7$ $D(m) = 7$

Iteration 5: $M^* := \{c, f, j, l\}$

x_s	c	f	j	l
$D^*(x_s)$	8	30	9	13

Iteration 6: $M^* := \{b, j, l, f\}$

x_s	b	j	l	f
$D^*(x_s)$	11	9	13	30

Iteration 7: $M^* := \{l, f, g, b\}$

x_s	l	f	g	b
$D^*(x_s)$	13	14	5	11

Iteration 8: $M^* := \{f, b, l\}$

x_s	f	b	l
$D^*(x_s)$	14	11	13

Iteration 9: $M^* := \{l, f\}$

x_s	l	f
$D^*(x_s)$	13	14

Iteration 10: $M^* := \{f\}$

x_s	f
$D^*(x_s)$	14

Markiere die Kante
(d, c)

$$D(c) = 8$$

Markiere die Kante (k, j)

$$D(j) = 9$$

Markiere die Kante (j, g)

$$D(g) = 5$$

Markiere die Kante (c, b)

$$D(b) = 11$$

Markiere Kante (k, l)

$$D(l) = 13$$

Markiere Kante (j, f)

$$D(f) = 14$$

