V2023-05-08

Montag, 8. Mai 2023 10:36

Aufgabentypen Normalverteilung

$\boxed{\text{Typ 1}}$: Sei X $N(\mu,\sigma^2)$-verteilt.
Bei bekanntem b, μ, σ ist gefragt nach $P(X \leq b)$

1. Regel Nr. 3: $P(X \leq b) = \Phi\Big(\underbrace{\frac{b-\mu}{\sigma}}_{z}\Big)$
2. Φ-Wert aus Tab., fertig
3. Falls $z < 0$: Lese $\Phi(-z)$ ab, dann ist $\Phi(z) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Nr. 1}}}{=} 1 - \Phi(-z) \quad \Big| \begin{array}{l} +\Phi(-z) \\ -\Phi(z) \end{array} \Big\} \Rightarrow \underbrace{\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)}_{\text{Nr. 1}}$

Varianten: a) Falls $P(X \geq b) = 1 - P(X \leq b)$

b) Falls $P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$

$\boxed{\text{Typ 2}}$ Sei X $N(\mu,\sigma^2)$-verteilt
Geg ist $P(X \leq b) = q$
Gesucht b, μ oder σ

Lösung: 1. q-Quantil z_q der $N(0,1^2)$-Vert aus Tabelle (nächster-Nachbar-Methode)

Falls $q < 0.5$: Regel Nr. 5: $1-q = \Phi(-z_q)$
Man liest also den Wert für $-z_q$ ab

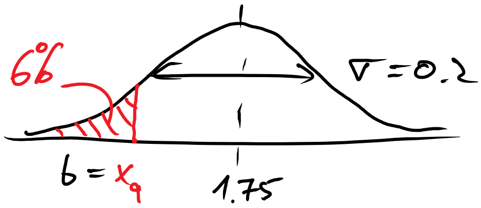
2. Mit dem ermitteln z_q über $z_q = \frac{b-\mu}{\sigma}$

nach dem gesuchten Wert $\underbrace{}_{b,\,\mu \text{ oder } \sigma}$ auflösen

Variante: Falls $P(X > b) = q'$ gegeben ist:

Umformen auf $P(X \leq b) = 1 - q' = q$, weiter wie oben.

Beispiel



Typ 2: $z_q = \dfrac{x_q - \mu}{\sigma} \iff x_q = z_q \sigma + \mu$

$$= (-1.56) \cdot 0.2 + 1.75 = \underline{\underline{1.438}}$$

$\boxed{\text{Ü1}}$ $\mu = 1.75$, $\sigma = 0.2$, $b = 2.00$ Gesucht $P(X > b)$

Typ 1-Aufgabe

$$P(X > b) = 1 - P(X \le b) \overset{Nr.3}{=}$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{2 - 1.75}{0.2}\right)$$

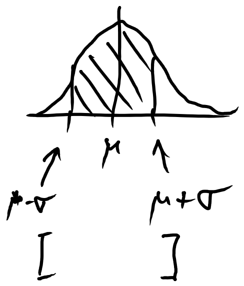
$$= 1 - \Phi(1.25)$$

Tab, nä Nachbar $\approx 1 - 0.8944 = 0.1056 = \underline{\underline{10.56\%}}$

$\boxed{\text{Ü2}}$ Typ 1-Aufg

$$P(\mu - \sigma \le X \le \mu + \sigma) = P(X \le \overbrace{\mu + \sigma}^{b}) - P(X \le \overbrace{\mu - \sigma}^{b})$$

$$\overset{Nr.3}{=} \Phi\left(\frac{\cancel{\mu} + \sigma - \cancel{\mu}}{\sigma}\right) - P\left(\frac{\cancel{\mu} - \sigma - \cancel{\mu}}{\sigma}\right)$$



$$= \Phi(1) - \Phi(-1)$$

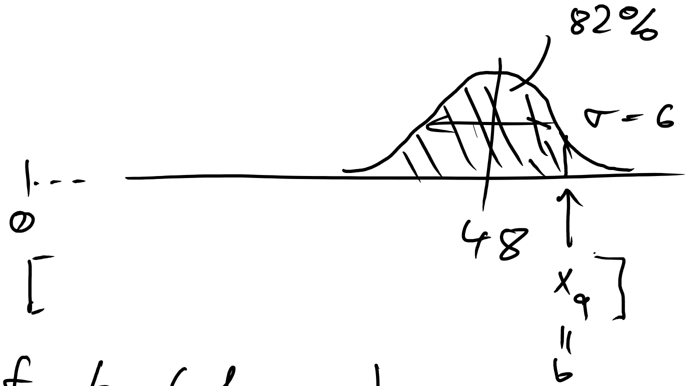
$$\overset{Nr.1}{=} \Phi(1) - (1 - \Phi(1))$$

$$= 2\Phi(1) - 1 = \underline{\underline{68.2\%}}$$

$$P(\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma) = 2\Phi(2) - 1 = \underline{\underline{95.5\%}}$$

$$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = 2\Phi(3) - 1 = \underline{\underline{99.7\%}}$$

Ü3



Typ 2 Gesucht ist b (oder x_q)

$\mu = 48,\ \sigma = 6$:

$$P(X \le b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \Phi(z_q) = 0.82$$

z_q ?

Aus Tabelle liest man ab $z_q = 0.922$

$$0.922 = \frac{b-48}{6} \Rightarrow b = 0.922\,\sigma + \mu = \underline{\underline{53.52}}\ [h]$$

$\boxed{\text{Ü4}}$ $P(1.5 \le X \le 2.5) \overset{\text{Nr.4}}{=} \Phi\left(\frac{2.5-2}{1}\right) - \Phi\left(\frac{1.5-2}{1}\right)$

$= \Phi(0.5) - \Phi(-0.5) = \Phi(0.5) - (1 - \Phi(0.5))$

$= 2\Phi(0.5) - 1 \quad = 2 \cdot 0.6915 - 1 \approx \underline{\underline{40\%}}$