V2023-05-15

Montag, 15. Mai 2023 10:56

Orga 1) Heute 15.05 : 13 Uhr - Ü ZOOM → s. ILias

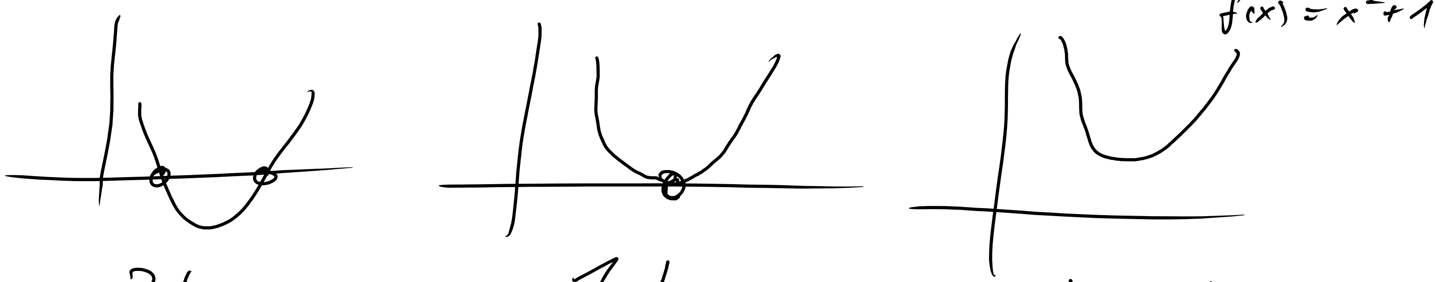
2) Klausureinsicht: 24.5., $12^{45} - 13^{30}$, R3.230

3) Wechsel Ana Schmitter:

ab 31.5. Analysis mehrere Veränderl.

Graphentheorie

Nullstellen einer Parabel



2 Lsg 1 Lsg keine Lsg

im Reellen viele versch Fälle

im Komplexen: (Fundamentalsatz Algebra

eine quadrat. Gl hat <u>immer</u> 2 Nullstellen

Komplexe Zahlen $z_1 = a_1 + i b_1$

$z_2 = a_2 + i b_2$

Addition
$$z_1 + z_2 = a_1 + i b_1 + a_2 + i b_2$$
$$= \underbrace{(a_1 + a_2)}_{Re(z_1+z_2)} + i \underbrace{(b_1 + b_2)}_{Im(z_1+z_2)}$$

Multiplikation
$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + i b_1)(a_2 + i b_2)$$
$$= a_1 a_2 + i b_1 a_2 + a_1 i b_2 + \underbrace{i^2}_{-1} b_1 b_2$$
$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

$\mathrm{Re}(z_1 z_2)$ $\qquad$ $\mathrm{Im}(z_1 z_2)$

Division $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1+ib_1)\cdot(a_2-ib_2)}{(a_2+ib_2)\cdot(a_2-ib_2)}$$

$$\overset{(S11\text{-}1)}{=} \frac{a_1a_2 + ib_1ib_2 - ia_1b_2 + ib_1a_2}{a_2^2+b_2^2}$$

$$= \frac{(a_1a_2 - b_1b_2) + i(b_1a_2 - b_2a_1)}{a_2^2+b_2^2}$$

Beispiel

$$\frac{1+2i}{1-i} = \frac{(1+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1-2+i(2\cdot 1+1\cdot 1)}{2}$$

$$= \frac{-1+3i}{2} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i}}$$

$\boxed{i^2 = -1 \text{ gilt immer}}$

Ü a) $i\cdot(3-2i) = 3i - 2\underbrace{i^2}_{(-1)}$

$$= 3i - 2(-1)$$

$$= \underline{\underline{2+3i}}$$

b) $|3-4i| = \sqrt{(3)^2+(-4)^2} = \sqrt{25} = \underline{\underline{5}}$

S11-1, Nr. 2

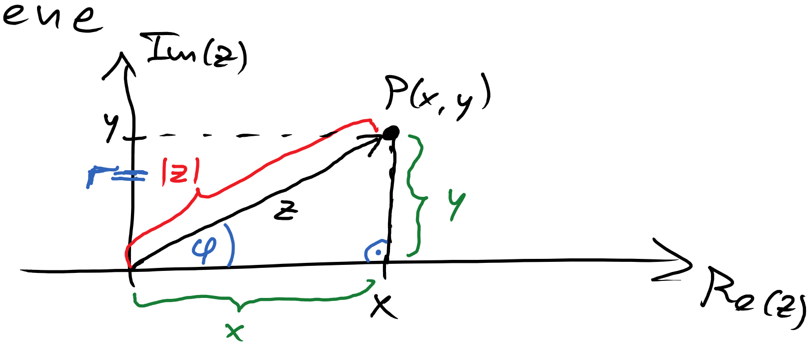
c) $\frac{3+4i}{2-i} = \frac{(3+4i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{3\cdot 2+4\overbrace{i^2}^{-1}+i(3+8)}{2^2+1^2}$

$$= \frac{2+i\,11}{5}$$

$$= \underline{\underline{\frac{2}{5}+i\,\frac{11}{5}}}$$

Gaußsche Zahlenebene

$$z = \underbrace{x}_{Re(z)} + i\underbrace{y}_{Im(z)}$$



$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(Re(z))^2 + (Im(z))^2}$$

↑ Pythagoras

z kann 1) durch x, y beschrieben werden,

$z = x + iy$ (kartesische Form)

z kann 2) durch r, φ beschrieben werden

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$

$$\Rightarrow z = r\cos\varphi + i\,r\sin\varphi$$

(trigonometrische Form)

3) alternativ durch r, φ

$$z = r\underbrace{(\cos\varphi + i\sin\varphi)}_{e^{i\varphi}} \quad ?$$

$$\Rightarrow \boxed{z = r\,e^{i\varphi}}$$ (Exponentialform)

$$i^0 = 1 = i^4 = i^8 = \ldots;$$
$$i^1 = i = i^5 = i^9 = \ldots;$$
$$i^2 = -1 = i^6 = i^{10} = \ldots;$$
$$i^3 = -i = i^7 = i^{11} = \ldots;$$

Montag, 15. Mai 2023 12:17

„Beweis" der Euler-Formel

$$e^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!} + \ldots$$

$$e^{i\varphi} = 1 + \frac{i\varphi}{1!} + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\varphi)^4}{4!} + \frac{(i\varphi)^5}{5!} + \ldots$$

$$= \underbrace{1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \ldots}_{} + \underbrace{i\left(\frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} + \ldots\right)}_{}$$

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \ldots$$

$$\underbrace{i\sin\varphi} = i\left(\frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} + \ldots\right)$$

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi}$$

q.e.d.

Übung Tabelle ausfüllen

z	$Re(z)$	$Im(z)$
$e^{i0} = 1$	$\cos(0) = 1$	$\sin(0) = 0$
$e^{i\pi/2} = i$	$\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$	$\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$
$\boxed{e^{i\pi} = -1}$	$\cos(\pi) = -1$	$\sin(\pi) = 0$
$e^{i2\pi} = 1$	$\cos(2\pi) = 1$	$\sin(2\pi) = 0$