

Mathematik 2 Vorlesung 31.5.23

Mehrdimensionale Differentialrechnung

Bisher : $y = f(x)$ 1 unabh. Variable

Aber: Volumen eines Zylinders : $V(r, h) = \pi \cdot r^2 \cdot h$

Wurfparabel : $W(\alpha, v_0) = \frac{2v_0^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{g}$
2 unabh. Variablen: r, h
g Erdbeschleunigung

Def: $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$
2 unabh. Variablen: α, v_0
n-Tupel

Spezialfall : $n=2$ $f(x_1, x_2) \in \mathbb{R}$

Schreibweise: $z = f(x, y)$

Darstellungsmöglichkeiten : 1) $z = f(x, y)$ $n=2$

explizit

nach der abhängigen Variable aufgelöst

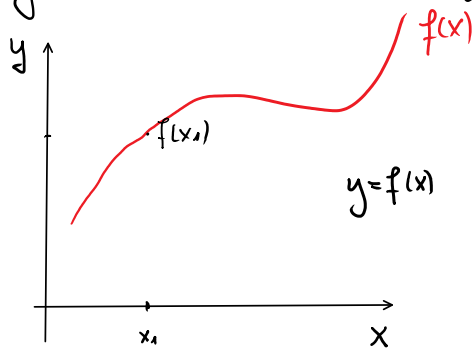
implizit

$F(x, y, z) = 0$

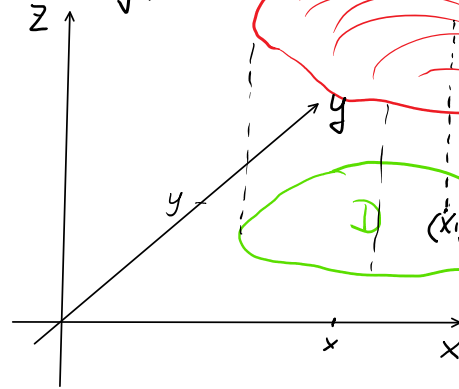
2) Funktionswerttabelle

$x \backslash y$	y_1	y_2	...	y_m
x_1	$z_{11} = f(x_1, y_1)$			$z_{1m} = f(x_1, y_m)$
x_2				
$\vdots$				
x_n	$z_{n1} = f(x_n, y_1)$			$z_{nm} = f(x_n, y_m)$

3) Graphische Darstellung



$$z = f(x, y)$$



Funktions-
gebirge

$$z = f(x, y)$$

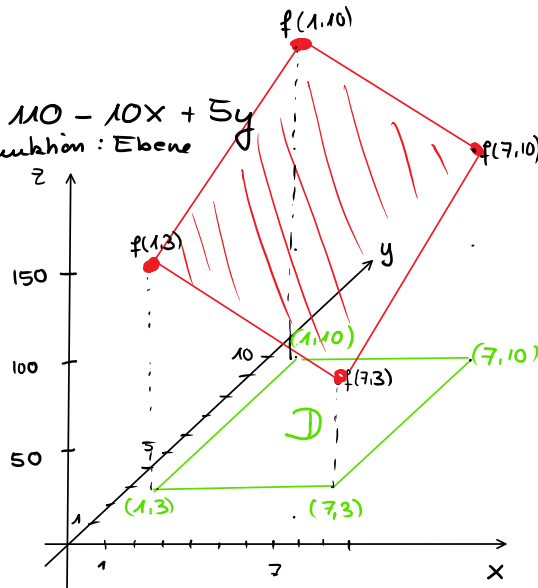
$$D \subset \mathbb{R}^2$$

3-D - Funktion

Bp: $f(x, y) = 110 - 10x + 5y$
lineare Funktion: Ebene

$$1 \leq x \leq 7$$

$$3 \leq y \leq 10$$



$$f(1, 3) = 115$$

$$f(7, 3) = 55$$

$$f(1, 10) = 150$$

$$f(7, 10) = 90$$

Funktionsgebirge werden durch nicht-lineare Funktionen dargestellt:

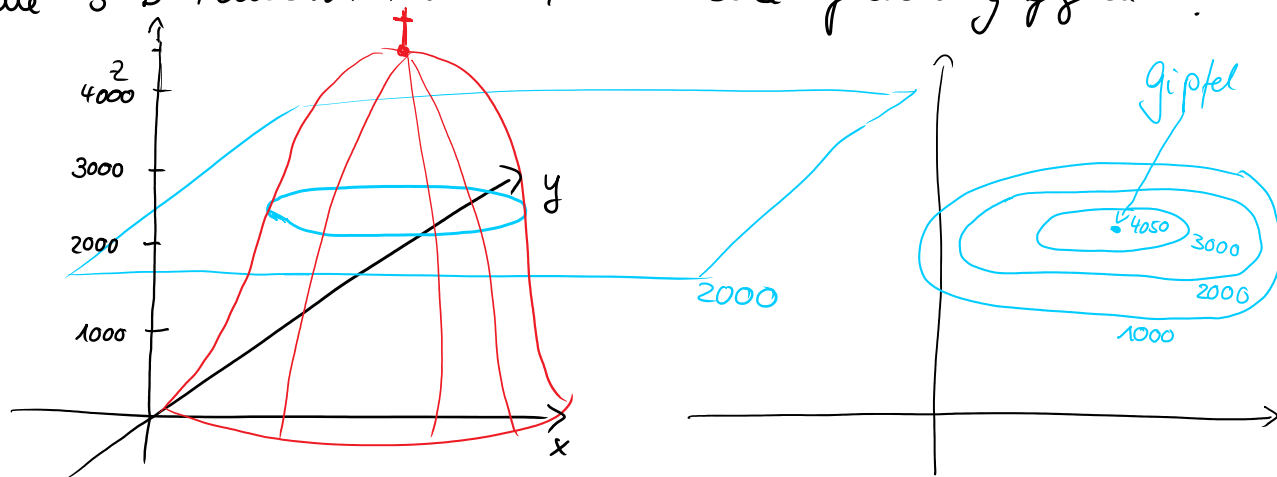
$$z = f(x, y) = 9 - 3x^3 + x \cdot y + 4y^2$$

$$z = f(x, y) = x \cdot \sin y + y \cdot \cos x$$

$$z = f(x, y) = y + \ln x + e^{x \cdot y}, \quad x > 0$$

Bem: Fkt. mit mehr als zwei unabh. Variablen kann man nicht mehr graphisch darstellen $\rightarrow$ 4. Dimension

Welche Hilfsmittel gibt es, sich eine Vorstellung zu verschaffen, wie eine 3-D Funktion aussieht, wenn eine Gleichung gegeben ist?



Einen ersten Eindruck über die "Form" eines Funktionsgebirges gewinnt man mit einem "Höhenliniendiagramm"

Gleichung des Berges: $z = f(x, y)$

Höhenlinie 2000m

$$z = 2000$$

$$f(x, y) = 2000$$

Höhenlinien sind Schnittkurven parallel zur x-y-Ebene

Aus $z = f(x, y)$ wird $f(x, y) = C$ C konstant

Bp.: $z = f(x, y) = x^2 + y^2$

Höhenlinien für $C=0, C=1, C=2, C=3$ bestimmen

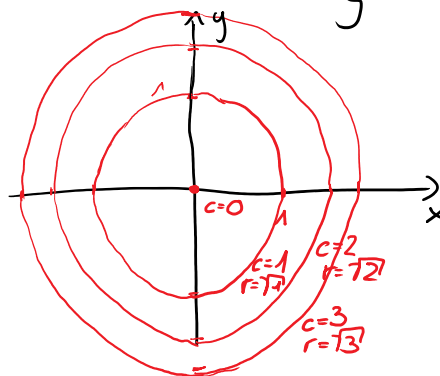
$$C=0 : x^2 + y^2 = 0$$

$$C=1 : x^2 + y^2 = 1$$

$$C=2 : x^2 + y^2 = 2$$

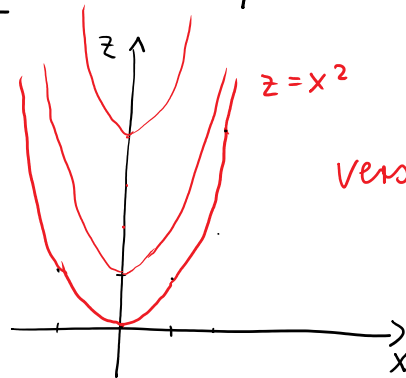
$$C=3 : x^2 + y^2 = 3$$

Zur Erinnerung: $x^2 + y^2 = r^2$ Kreisgleichung eines Kreises um 0 mit Radius r



Schnittkurvendiagramme parallel zur x - z -Ebene für $z = f(x, y) = x^2 + y^2$
 y ist konstant

$$\begin{array}{ll} C=0 & : z = x^2 + 0^2 \quad z = x^2 \\ C=1 & : z = x^2 + 1^2 \quad z = x^2 + 1 \\ C=2 & : z = x^2 + 2^2 \quad z = x^2 + 4 \end{array}$$



Verschobene Normalparabeln

Schnittkurvendiagramme parallel zur y - z -Ebene x ist konstant

$$\begin{array}{ll} C=0 & : z = 0^2 + y^2 \quad z = y^2 \\ C=1 & : z = 1^2 + y^2 \quad z = y^2 + 1 \\ C=2 & : z = 2^2 + y^2 \quad z = y^2 + 4 \end{array}$$

Auch verschobene Normalparabeln
in der y - z -Ebene

Zusammenfügen von Höhenlinien und Schnittkurvendiagramme:

