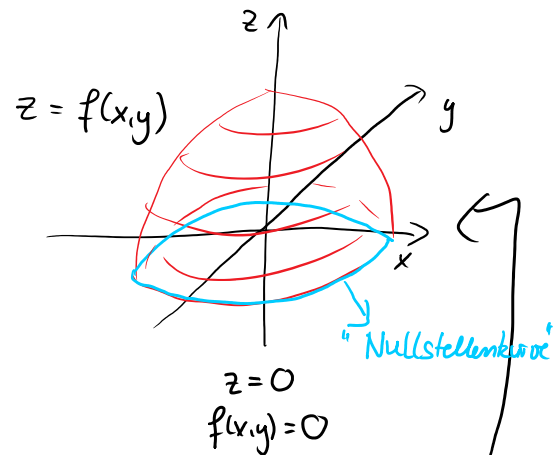
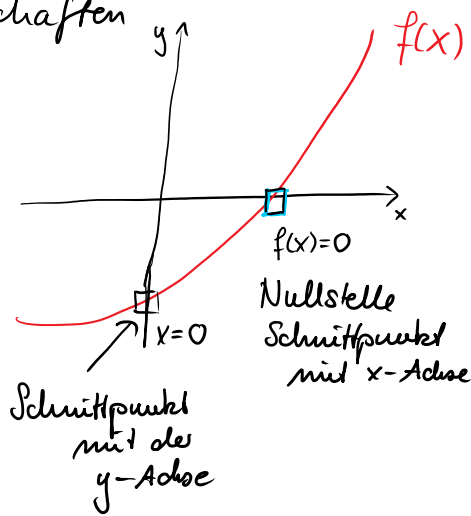


Vorlesung 5.6.23

Funktionseigenschaften

$$y = f(x)$$



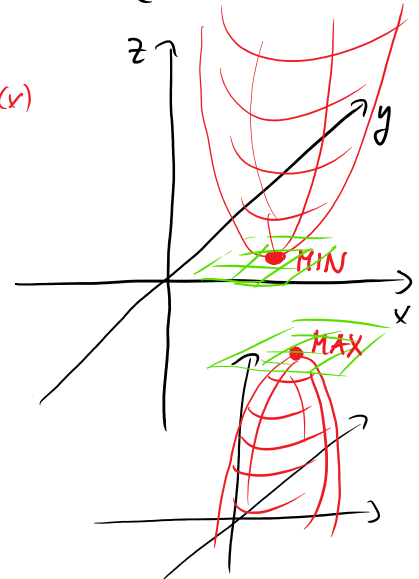
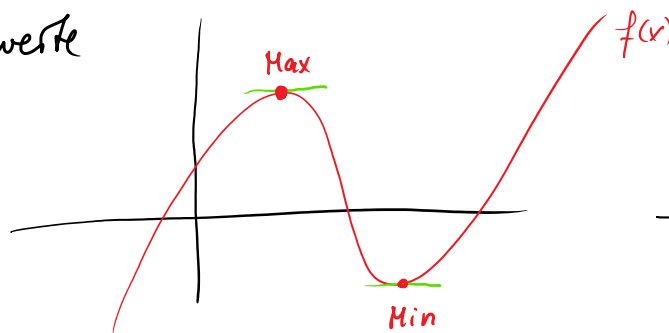
Bp: $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ Halbkugel

Nullstellen:

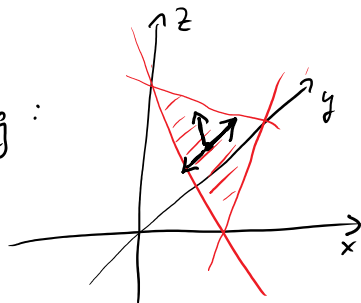
$$\begin{aligned} \sqrt{1 - x^2 - y^2} &= 0 \quad |(\)^2 \\ 1 - x^2 - y^2 &= 0 \quad | +x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

Punkt $\longrightarrow$ Kurve

Extremwerte



Steigung:

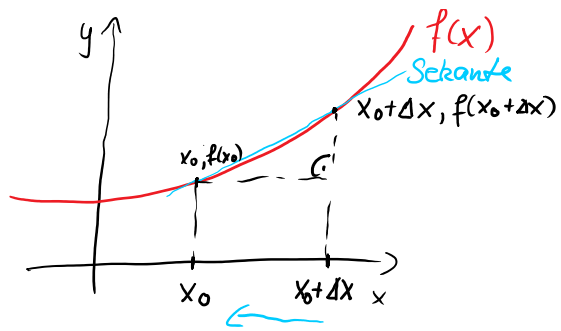


notwendig:

Angabe einer Richtung

Allg. Def: Nach Festlegung einer Richtung ist die Steigung dann die Steigung der Schnittkurve in dieser Richtung

Erinnerung $n=1$ 1 unabh. Variable



$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x_0 + \Delta x - x_0}$$

Differentialquotient

Def: Partielle Ableitung 1. Ordnung für $z = f(x, y)$
nach x :

$$f_x(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

Steigung der Schnittkurve in x -Achsenrichtung

y ist wie eine Konstante zu behandeln

$$f_y(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Steigung der Schnittkurve in y -Achsenrichtung

x ist wie eine Konstante zu behandeln

Partielle Ableitungen einer Funktion mit n Variablen:

$$f_{x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{\Delta x_i} \quad i = 1, \dots, n$$

$n = 2$: 2 partielle Abl. 1. Ordnung

n bel. : n partielle Abl. 1. Ordnung

Gradient: fasst alle partiellen Ableitungen 1. Ordnung in einem Spalten- oder Zeilenvektor zusammen.

$$\text{grad } f(x) = \begin{pmatrix} f_{x_1} \\ f_{x_2} \\ \vdots \\ f_{x_n} \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad (f_{x_1}, f_{x_2}, \dots, f_{x_n})$$

Beispiele für Ableitungen:

1) $z = f(x, y) = e^{x \cdot y}$

$$z_x = y \cdot e^{xy}$$

$$z = e^{xy}$$

$$z_y = x \cdot e^{xy}$$

$$z = e^{xy}$$

2) $z = f(x, y) = x^n \cdot y^m$

$$z_x = n \cdot x^{n-1} \cdot y^m = n \cdot y^m \cdot x^{n-1}$$

$$z_y = m \cdot x^n \cdot y^{m-1} = m \cdot y^{m-1} \cdot x^n$$

$$3) z = f(x,y) = x \cdot \ln y \quad \begin{aligned} z_x &= \ln y \\ z_y &= x \cdot \frac{1}{y} = \frac{x}{y} \end{aligned}$$

Steigung im Punkt $(1, 2)$ $f(1,2) = 1 \cdot \ln 2 = \ln 2$

$$\text{grad } f = \begin{pmatrix} \ln y \\ \frac{x}{y} \end{pmatrix} \quad \text{grad } (1,2) = \begin{pmatrix} \ln 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$4) z = f(x,y) = \sin x \cdot \cos y$$

$$z_x = \cos x \cdot \cos y \quad \text{hier: } \sin x \text{ wird abgeleitet}$$

$$z_y = \sin x \cdot (-\sin y) = -\sin x \cdot \sin y \quad \text{hier: } \cos y \text{ wird abgeleitet}$$

Merke: nur die Variable, nach der abgeleitet wird, zählt! ▽

$$\text{Bp: } z = f(x,y) = 2x \cdot y - 3x^2 + \frac{1}{y} \quad \begin{aligned} f(2,1) &= 2 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2^2 + \frac{1}{1} \\ &= 4 - 12 + 1 = -7 \end{aligned}$$

Gesucht: Steigung in x-Achsenrichtung und in y-Achsenrichtung

im Punkt $(2,1)$ der Definitionsebene

also im Punkt $(2,1, f(2,1))$, also im Punkt $(2,1,-7)$

$$f_x(x,y) = 2y - 6x \quad (\text{"y konstant"})$$

$$f_y(x,y) = 2x - \frac{1}{y^2} \quad (\text{"x konstant"})$$

$$\text{grad } f(2,1) = \begin{pmatrix} f_x(2,1) \\ f_y(2,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Wichtig nun: Kenntnis aller Ableitungsregeln für Funktionen mit einer unabh. Variablen

Bp: 1) $z = f(x, y) = \underbrace{4x^2 \cdot \sin x}_{\text{Produktregel}} \cdot \cos y$ (u \cdot v)' = u'v + uv'

$$z_x = 4 \cdot \cos y \cdot (x^2 \cdot \sin x)' = 4 \cdot \cos y (2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x)$$

$$= 8x \cdot \sin x \cdot \cos y + 4x^2 \cdot \cos x \cdot \cos y$$

$$z_y = 4x^2 \cdot \sin x \cdot (-\sin y)$$

$$= -4x^2 \sin x \cdot \sin y$$

2) $z = f(x, y) = y \cdot e^{x^2+y^2}$ Kettenregel bei z_x

$$z_x = 2x \cdot y \cdot e^{x^2+y^2}$$

Produktregel und Kettenregel bei z_y

$$z_y = 1 \cdot e^{x^2+y^2} + y \cdot 2y \cdot e^{x^2+y^2}$$

$$= e^{x^2+y^2} (1 + 2y^2)$$

nun 3 Variablen: 3) $u(x, y, z) = 2x \cdot e^{yz} + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$u_x = 2 \cdot e^{yz} + \frac{1 \cdot 2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 2e^{yz} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$u_y = 2xz \cdot e^{yz} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$u_z = 2xy e^{yz} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$