Vorlesung Mathematik 12.6.2023

Das totale Differential

Fragestellung: Wie ändert sich der Funktionswert einer mehrdimensionalen Funktion bei geringfügigen Änderung der Argumente?

Stichwort: Linearisierung

$n=1$: Tangente

Gleichung: $y = mx + b$

Im Berührpunkt $f(x_0, f(x_0))$ gilt $y' = f'(x_0) = m$

Also: $y_0 = mx_0 + b \Rightarrow b = y_0 - mx_0 = y_0 - f'(x_0)$

$y = f'(x_0)x + y_0 - f'(x_0) \cdot x_0$

$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

$n=2$ Ebenengleichung $z = ax + by + c$

$z = f(x,y)$

$$z_x = a$$
$$z_y = b$$

partielle Ableitungen von $f(x,y)$: $f_x(x,y)$
$f_y(x,y)$

Im Berührpunkt $P(x_0, y_0, z_0)$ gilt:

$$a = f_x(x_0, y_0) \quad *$$
$$b = f_y(x_0, y_0)$$

$P(x_0, y_0, z_0)$ liegt auf der Tang.ebene: $z_0 = ax_0 + by_0 + c$

$$\Rightarrow c = z_0 - ax_0 - by_0$$
$$= z_0 - f_x(x_0,y_0)x_0 - f_y(x_0,y_0)y_0$$

Damit ist:

$$z = \underbrace{f_x(x_0,y_0) \cdot x}_{a \cdot x} + \underbrace{f_y(x_0,y_0) \cdot y}_{b \cdot y} + \underbrace{z_0 - f_x(x_0,y_0) \cdot x_0 - f_y(x_0,y_0) \cdot y_0}_{c}$$

$$z - z_0 = f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0)$$

Gleichung der Tangentialebene

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$ Zuwachs auf der Fläche

Eingesetzt in Gleichung der Tangentialebene:

$$z - z_0 = f_x(x_0,y_0)(x_0 + \Delta x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y_0 + \Delta y - y_0)$$
$$dz = f_x(x_0,y_0) \cdot dx + f_y(x_0,y_0) dy$$

Def: Das totale oder vollständige Differential

$$dz = f_x(x,y)\, dx + f_y(x,y)\, dy$$ lineares Differentialausdruck

$n=2$

$$dz = f_{x_1}(x_1, \dots x_n)\, dx_1 + f_{x_2}(x_1, \dots x_n)\, dx_2 + \dots\dots + f_{x_n}(x_1, \dots x_n)\, dx_n$$

Merke: Linearisierung der Funktion

Bp.: $r(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ Abstand eines Punktes im 3D-Raum

Bp.: $r(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ Abstand eines Punktes im 3D-Raum zum Koordinatenursprung

Frage: Wie ändert sich der Abstand von $A(1,2,0)$, wenn er nach $B(0{,}9;\ 2{,}2;\ -0{,}1)$ verschoben wird? (annähernd!)

$$dr = r_x\,dx + r_y\,dy + r_z\,dz$$

$dx = -0{,}1$
$dy = +0{,}2$
$dz = -0{,}1$

$$r_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad r_x(1,2,0) = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$r_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad r_y(1,2,0) = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$r_z = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad r_z(1,2,0) = \frac{0}{\sqrt{5}} = 0$$

$$dr = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot(-0{,}1) + \frac{2}{\sqrt{5}}(0{,}2) + 0\cdot(-0{,}1)$$

$$\approx 0.1342 \qquad dr = 0{,}134$$

Die reale Abstandsänderung beträgt:

$$\Delta r = \left| r(1,2,0) - r(0{,}9;\ 2{,}2;\ -0{,}1) \right|$$
$$= \left| \sqrt{5} - \sqrt{5{,}66} \right| = 0{,}143$$

$$\Delta r = 0{,}143$$

ÜA: Berechnen Sie das totale Differential von

a) $z(x,t) = \dfrac{t^2+x}{2t-4x}$

b) $f(x_1,x_2) = x_1^{\alpha}\cdot x_2^{\beta}$

Extremwerte bei Funktionen mit mehreren unabh. Variablen

geg: $z = f(x,y)$ z besitzt an der Stelle (x_0,y_0) einen Extremwert

$\Leftrightarrow$ 1) $f_x(x_0,y_0) = 0 \quad f_y(x_0,y_0) = 0$

$(\operatorname{grad} f = 0)$

notwendige Bedingungen
(liefern Kandidaten)

$$\Delta(x_0,y_0) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{yx}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{vmatrix}$$

Determinante der Hesse-Matrix

2) $\Delta(x_0,y_0) = f_{xx}(x_0,y_0) \cdot f_{yy}(x_0,y_0) - f_{xy}(x_0,y_0)^2 > 0$

hinreichende Bedingung

Ist $f_{xx}(x_0,y_0) < 0 \Rightarrow$ rel. Max.

$f_{xx}(x_0,y_0) > 0 \Rightarrow$ rel. Min.

Falls: $\Delta(x_0,y_0) < 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt

$\Delta(x_0,y_0) = 0 \Rightarrow$ keine Entscheidung möglich

Bei Funktionen mit n Variablen: $z = f(x_1,\dots,x_n)$, $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ sei Kandidat

notwendig: $\operatorname{grad} f(\bar{x}) = 0$

1) $grad_f(\bar{x}) = 0$

2) $H(\bar{x})$ Hesse'sche Matrix

$$H_i = \begin{vmatrix} f_{x_1x_1}(\bar{x}) & \dots & f_{x_1x_i}(\bar{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_ix_1}(\bar{x}) & \dots & f_{x_ix_i}(\bar{x}) \end{vmatrix}$$

$\bar{x}$ lokales Max. $\Leftrightarrow H_1 < 0, H_2 > 0, H_3 < 0, \dots$

$\bar{x}$ lokales Min $\Leftrightarrow H_1 > 0, H_2 > 0, H_3 > 0, \dots$

Bp $f(x_1,x_2,x_3) = e^{x_1^3 - 3x_1} - x_2^2 + x_2 \cdot x_3 - x_3^2 + 3x_3$

I $f_{x_1} = (3x_1^2 - 3) \cdot e^{x_1^3 - 3x_1}$ II $f_{x_2} = -2x_2 + x_3$ III $f_{x_3} = x_2 - 2x_3 + 3$

$f_{x_1x_1} = 6x_1 \cdot e^{x_1^3-3x_1} + (3x_1^2-3)^2 \cdot e^{x_1^3-3x_1}$
$= e^{x_1^3-3x_1}(6x_1 + (3x_1^2-3)^2)$

$f_{x_2x_3} = f_{x_3x_2} = 1$

$f_{x_1x_2} = f_{x_2x_1} = 0$

$f_{x_1x_3} = f_{x_3x_1} = 0$

$f_{x_2x_2} = -2$

$f_{x_3x_3} = -2$

Notwendige Bed. auswerten:
I, II, III gleich 0 setzen

I: $\underbrace{(3x_1^2 - 3)}_{=0} \cdot \underbrace{e^{x_1^3 - 3x_1}}_{\neq 0} = 0$

$\Rightarrow x_{11} = 1 \qquad x_{12} = -1$

Aus II+III: $x_3 = 2 \quad x_2 = 1$

Kandidaten $x_{E_1} = (1,1,2) \qquad x_{E_2} = (-1,1,2)$

$$H_3(1,1,2) = \begin{vmatrix} 6e^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 6e^{-2}(4-1) = 18e^{-2} > 0$$

Entwickeln nach 1. Zeile

$$H_2(1,1,2) = \begin{vmatrix} 6e^{-2} & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -12e^{-2} < 0$$

$$H_1(1,1,2) = |6e^{-2}| > 0$$

Für x_{E_1} gilt
$H_3 > 0, H_2 < 0, H_1 > 0$

$\Rightarrow$ keine Entscheidung

$H_1(1,1,2) = |6e^{-2}| > 0$ $\Rightarrow$ keine Entscheidung möglich

$$H_3(-1,1,2) = \begin{vmatrix} -6e^2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -6e^2(4-1) = -18e^2 < 0$$

Entw. nach Zeile 1

$$H_2(-1,1,2) = \begin{vmatrix} -6e^2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 12e^2 > 0$$

$$H_1(-1,1,2) = \left| -6e^2 \right| < 0$$

Für x_{E_2} gilt:

$H_3 < 0 \quad H_2 > 0 \quad H_1 < 0$,

lokales Maximum