Vorlesung Mathematik 14.6.23

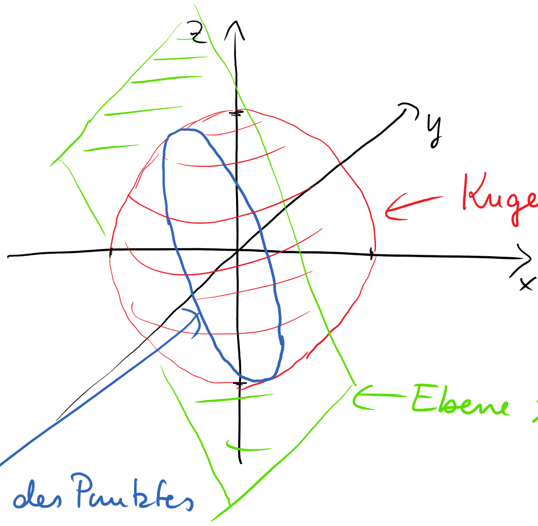
Extremwerte mit Nebenbedingungen

Bp. Punkt P bewegt sich auf der Ebene $x+y+z=0$

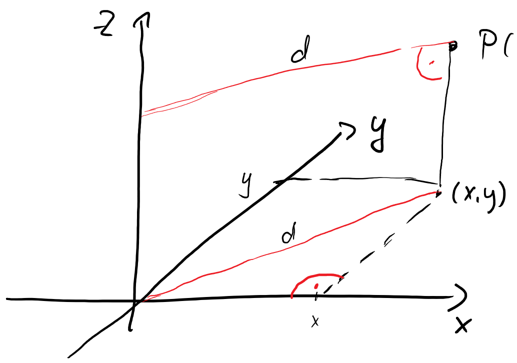
Der Abstand von P zum Ursprung sei 1

(Er bewegt sich also auf einer Kugel um 0 mit $r=1$)

Frage: Welches ist der kleinste und welches ist der größte Abstand von der z-Achse



Zielfunktion: Abstand von $P(x,y,z)$ von der z-Achse



Zielfunktion:

$f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$

Stichwort: Pythagoras

Nebenbedingungen

1) $x^2+y^2+z^2=1$ (Kugel)

2) $x+y+z=0$ (Ebene)

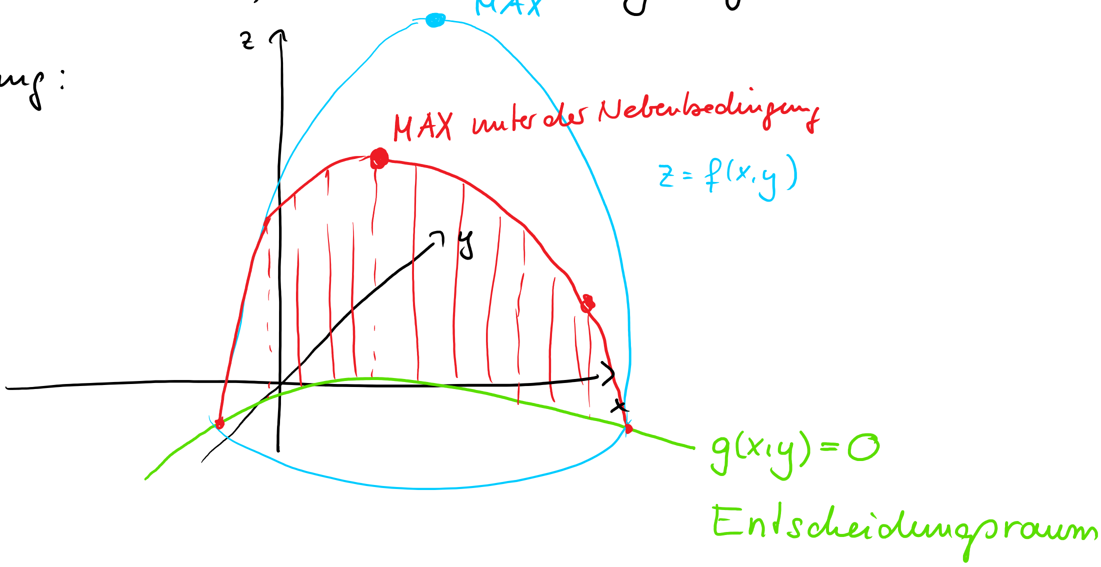
Beispiel für eine Extremwertaufgabe:

Fkt. mit 3 unabh. Variablen und 2 Nebenbedingungen

Lösungsmöglichkeiten : 1) Variablensubstitution
(s. WS Dosenproblem)

2) Methode von Lagrange

Vorabbemerkung:



Die Methode von Lagrange
(1736-1813)

Formulierung für $z = f(x,y)$ und Nebenbedingung $g(x,y) = 0$

Die Extremwerte der Funktion $z = f(x,y)$ unter der NB $g(x,y) = 0$ liegen an den Stellen, an denen

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda \cdot g(x,y)$$

ihre Extremwerte annimmt

λ heißt der Lagrange-Multiplikator

Allgemein: $z = f(x_1, \dots, x_n)$

$z_j = g_j(x_1, \dots, x_n) = 0$ k Nebenbed. $j = 1, \dots k$

$x = (x_1, \dots x_n)$ $\lambda = (\lambda_1, \dots \lambda_k)$

$$L(x,\lambda) = \underbrace{L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots \lambda_k)}_{n+k \text{ Variablen}} = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j g_j(x_1, \dots x_n)$$

Bp: Dosenproblem aus WS

In einer Fabrik werden oben offene Dosen mit $V = 1\,l = 1000\,cm^3$ hergestellt. Der Materialverbrauch soll minimal sein.

$r = ?$ $h = ?$

Zielfunktion : $f(r,h) = \underbrace{\pi \cdot r^2}_{\text{Boden}} + \underbrace{2\pi \cdot r \cdot h}_{\text{Mantel}}$

Nebenbedingung : $g(r,h) = \pi \cdot r^2 \cdot h - 1000 = 0$

Nebem: $V = 1000\,cm^3 = 1$

$V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 1 = 1000$

$$L(r,h,\lambda) = \pi \cdot r^2 + 2\pi r h + \lambda(\pi \cdot r^2 \cdot h - 1000)$$

notwendige Bedingungen:

$$\text{I} : L_r = 2\pi r + 2\pi h + 2\lambda\pi \cdot r h = 0$$

$$\text{II} : L_h = 2\pi r + \lambda \pi r^2 = 0$$

$$\text{III} : L_\lambda = \pi r^2 \cdot h - 1000 = 0$$

(genau die Nebenbedingung)

Aus II : $2\pi r = -\lambda \pi r^2 \iff -\lambda = \frac{2\pi r}{\pi r^2} \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{r}$ $*$

Aus I : $2\pi r + h(2\pi + 2\lambda\pi r) = 0$

mit $*$: $2\pi r + h(2\pi + -2 \cdot \frac{2}{r} \cdot \pi \cdot r) = 0$

$\iff 2\pi r + h(-2\pi) = 0$

$\iff 2\pi r = 2\pi h \Rightarrow h = r$ $**$

Aus III mit $**$: $\pi \cdot r^2 \cdot r - 1000 = 0$

$\iff r^3 = \frac{1000}{\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}} = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}} = h$

Zu Hause: $z = f(x,y) = -x^2 - \frac{1}{2}y^2 + 4$ $D = \mathbb{R}_+^2$

$g(x,y) = 2 - 2x - y = 0$

Veranschaulichen

Lösen mit 1) Variablensubstitution

2) Methode von Lagrange

Lösen des Eingangsbeispiels mit der Methode von Lagrange

$$z = f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$g_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1 = 0$$
$$g_2(x,y,z) = x+y+z = 0$$

$$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = \sqrt{x^2+y^2} + \lambda_1\left(x^2+y^2+z^2-1\right) + \lambda_2(x+y+z)$$

$$L_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2\lambda_1 \cdot x + \lambda_2 = 0 \qquad \underline{I}$$
$$L_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0 \qquad \underline{II}$$
$$L_z = 2\lambda_1 z + \lambda_2 = 0 \qquad \underline{III}$$
$$L_{\lambda_1} = x^2+y^2+z^2-1 = 0 \qquad \underline{IV}$$
$$L_{\lambda_2} = x+y+z = 0 \qquad \underline{V}$$

Aus I : $\lambda_2 = -\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2\lambda_1 x\right)$

Aus II : $\lambda_2 = -\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2\lambda_1 y\right)$

Entweder $x=y$

oder $\lambda_2 = 0$

Fall : $x=y$: in $\underline{V}$: $2x+z=0 \Rightarrow z=-2x$ *

* in $\underline{IV}$: $x^2+x^2+(-2x)^2 = 1 \Rightarrow 6x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{6} \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{1}{6}}$

Die ersten beiden Kandidaten : $P_1\left(+\frac{1}{6}\sqrt{6}, \frac{1}{6}\sqrt{6}, -\frac{1}{3}\sqrt{6}\right)$

$P_2\left(-\frac{1}{6}\sqrt{6}, -\frac{1}{6}\sqrt{6}, \frac{1}{3}\sqrt{6}\right)$

Fall : $\lambda_2 = 0$ Aus $\underline{III}$: $2\lambda_1 \cdot z = 0 \Rightarrow z = 0$ oder $\lambda_1 = 0$

$z = 0 \underset{\underline{V}}{\Rightarrow} x = -y$ **

** in $\underline{IV}$: $x^2+x^2+0^2 = 1 \Rightarrow 2x^2 = 1$

$\Rightarrow x_3 = \sqrt{\frac{1}{2}}$

$x_4 = -\sqrt{\frac{1}{2}}$

Weitere Kandidaten : $P_3\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0\right)$

$P_4\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, 0\right)$

Fall $\lambda_1 = 0$: Aus I und II $x=y=0$ ***

*** in $\underline{V}$: $z = 0$ $\lightning$ zu $\underline{IV}$

$\lambda_1 = 0$ tritt nicht ein

Berechne : $f(P_1) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ $\quad f(P_3) = \sqrt{1} = 1$

$f(P_2) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ $\quad f(P_4) = \sqrt{1} = 1$

P_1, P_2 kürzester Abstand

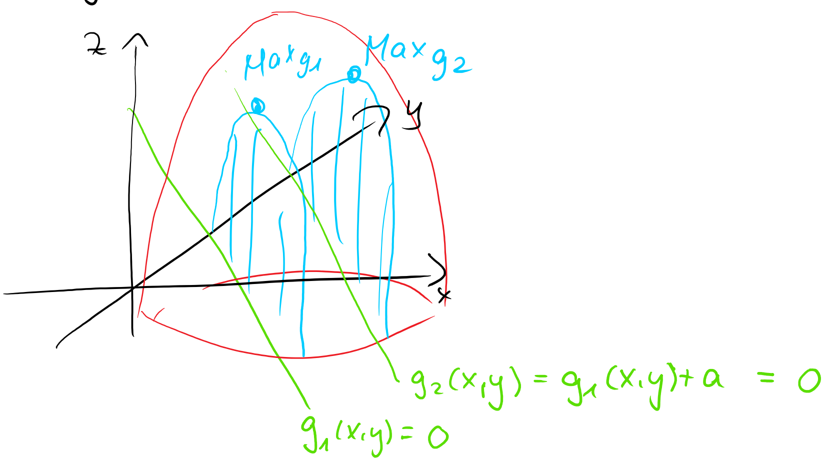
P_3, P_4 längster Abstand

Interpretation des Lagrange-Multiplikators

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g_1(x,y)$$

$$g_2(x,y) = g_1(x,y) + a \qquad (a > 0)$$

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\left(g_1(x,y) + a\right)$$



$$\frac{dL}{da} = \lambda$$

Infinitesimale Änderung des Absolutgliedes der Nebenbed. hat die λ-fache Wirkung auf die Zielfunktion