

Vorlesung Mathematik 2 19.6.23

Hinweis : Üb. 61.9 : A15 nur Kandidaten für Extremwerte bestimmen
hinreichende Bedingungen wurden im SS 23 nicht vergestellt.

Interpretation des Lagrange Multiplikators

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

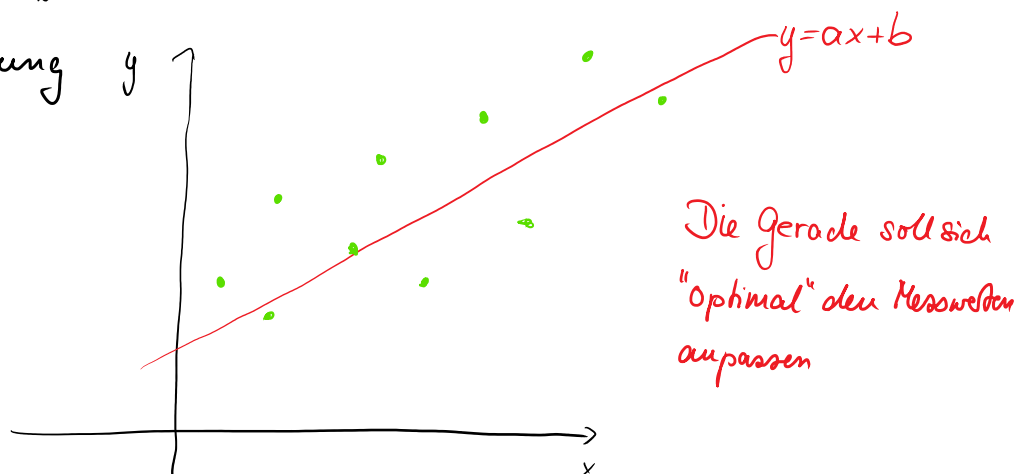
$$\frac{L(x, y, \lambda) - f(x, y)}{g(x, y)} = \lambda \quad \text{Differentialquotient der Funktion } L \text{ nach der Funktion } g(x, y)$$

λ Änderungsrate der Fkt. L bei Variation der Nebenbed. g
marginale Änderungsrate

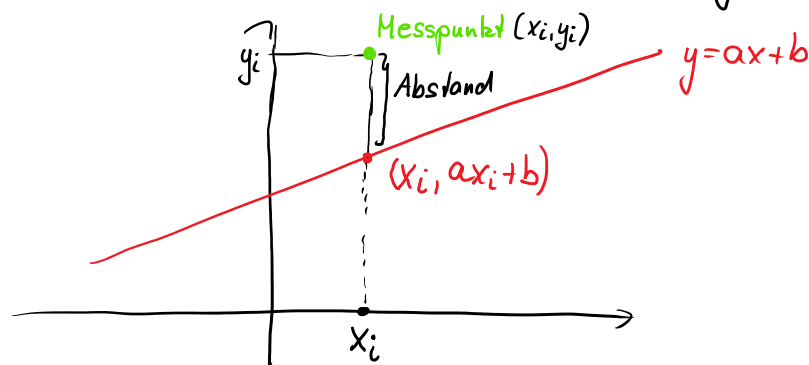
Am Ende dieser Seiten finden Sie den Nachweis, dass es sich bei den beiden Werten für a und b bei der Methode der kleinsten Quadrate auch tatsächlich um ein Minimum handelt.

Anwendung der Differentialrechnung für mehrdimensionale Funktionen
Ausgleichsrechnung

Lineare Anpassung



Die Methode der kleinsten Quadrate nach C.F. Gauß



Abstand zwischen Messpunkt und Geradenpunkt beträgt: $[y_i - (ax_i + b)]$

Summe der Abstandsquadrate:

$$Q(\underline{a}, \underline{b}) = \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]^2$$

Funktion mit 2 unabh. Variablen a, b

a, b sind die Koeffizienten der Näherungsgeraden $y = \underline{a}x + \underline{b}$

Ziel: Extremwert für $Q(a, b)$ bestimmen, Wert muss ein Minimum sein!

Vorgehen: $Q(a, b) = \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]^2$ (x_i, y_i) sind die Messdaten

1) partielle Ableitungen bestimmen
und gleich Null setzen

notwendige Bedingungen

$$Q(a,b) = \sum_{i=1}^n (y_i^2 - 2(ax_i+b) \cdot y_i + \underbrace{(ax_i+b)^2}_{a^2 x_i^2 + 2ax_i b + b^2})$$

$$\begin{aligned} Q_a(a,b) &= \sum_{i=1}^n -2x_i y_i + 2ax_i^2 + 2x_i b \\ &= 2 \sum_{i=1}^n (-x_i y_i + ax_i^2 + x_i b) = 0 \quad \text{I} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_b(a,b) &= \sum_{i=1}^n -2y_i + 2ax_i + 2b \\ &= 2 \sum_{i=1}^n (-y_i + ax_i + b) = 0 \quad \text{II} \end{aligned}$$

Auflösen und Umformen ergibt die sog. Normalgleichungen:

$$\text{Aus I: } \sum_{i=1}^n x_i y_i = a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\text{Aus II: } \sum_{i=1}^n y_i = a \sum_{i=1}^n x_i + n \cdot b$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{arithmetische Mittel}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

$$b = \bar{y} - a \cdot \bar{x}$$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2}$$

Diese Werte liefern ein Minimum

*

Es kann gezeigt werden: $Q_{aa} = 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 > 0$

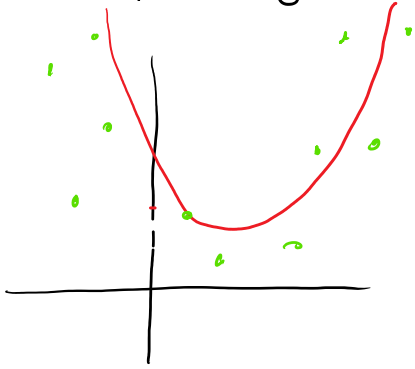
$$Q_{bb} = \sum_{i=1}^n 2 = 2n > 0$$

$$Q_{ab} = 2 \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\Delta > 0$$

Vorgehen: Berechnen von a und b aus den Messwerten
 $y = ax + b$

Anpassung mit Hilfe von Ausgleichskurven

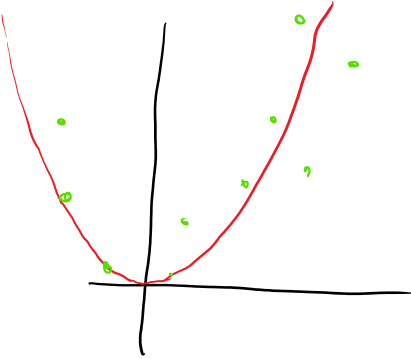


$$y = \underline{a}x^2 + \underline{b}x + \underline{c}$$

quadratische Funktion

3 Variablen

$Q(a, b, c)$

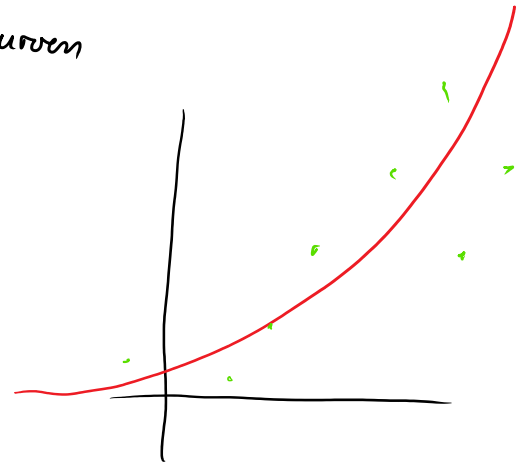


$$y = ax^b$$

Potenzfunktion

2 Variablen

$Q(a, b)$



$$y = a \cdot e^{bx}$$

Exponentialfunktion

2 Variablen

$Q(a, b)$

Ausatz: Immer die Summe der Abstandsquadrate

Graphentheorie

Routenplanung

Datenetze

Aufsuchen kürzester Wege

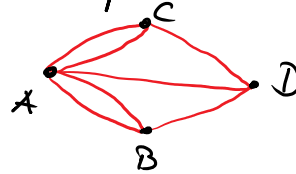
Sie kennen: Pfeildiagramme

Wahrscheinlichkeitsbäume

Goziatographen ($\rightarrow$ Matrix)

Historisches Beispiel: Euler'sches Brückenproblem

(abstrahiert:



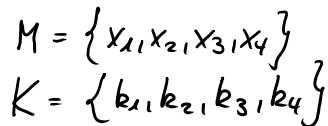
Euler'scher Weg?)



K Menge von Kanten

Triplet $G = (M, K, v)$ heißt Graph

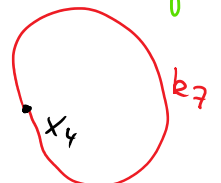
Bsp. gerichteter Graph (heißt auch Digraph)

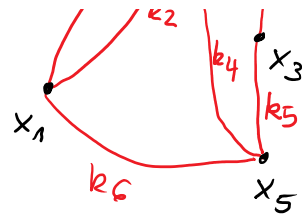

$$v(k_4) = (x_3, x_4)$$
$$\text{Bp: } G = (M, K, v) \quad M = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$$

$$K = \{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7\}$$
$$V(k_7) = \{x_4, x_4\}$$

A graph with two vertices, x_1 and x_2 . There are four edges between them: k_1 (top), k_2 (middle), k_3 (bottom), and k_4 (vertical).

Schlinge, Schleife





x_6 isolierter Knoten

Nun muss gezeigt werden, dass es sich bei diesem Ergebnis auch tatsächlich um ein Minimum handelt. Es müssen die hinreichenden Bedingungen geprüft werden:

$$Q_{aa} = 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 > 0$$

$$Q_{bb} = \sum_{i=1}^n 2 = 2n > 0$$

$$Q_{ab} = 2 \sum_{i=1}^n x_i$$

Bleibt nur noch zu zeigen: $\Delta > 0$

(Die Hesse'sche Determinante ist > 0)

$$\Delta = Q_{aa} \cdot Q_{bb} - (Q_{ab})^2$$

$$\begin{aligned} \Delta &= \left(2 \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \cdot 2n - \left(2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \\ &= 4n \sum_{i=1}^n x_i^2 - 4 \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = 4 \left[\left(n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Setze $n = \frac{2n}{2}$

$$= 4 \left[\left(\frac{2n}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right] \quad \text{da } \frac{1}{2} \text{ ausgeklammert}$$

$$2n = n+n \quad = 4 \left[\frac{1}{2} \left(n \sum_{i=1}^n x_i^2 + n \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2 \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right) \right]$$

$$= 4 \left[\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n (n x_i^2 + n x_i^2 - \sum_{j=1}^n 2 x_i x_j) \right) \right]$$

Bem.: $\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2$
 $= \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)$
↓
vor die Klammer
Summationsvariable umbenennen

Bin. Formel

$$\begin{aligned} &= 4 \left[\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i^2 + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n x_j^2 - \sum_{j=1}^n 2 x_i x_j \right) \right] \\ &= 4 \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - x_j)^2 \right] \Rightarrow \Delta > 0 \end{aligned}$$

Mit $\Delta > 0$ und $Q_{aa} > 0$

handelt es sich in jedem Fall um ein Minimum.

Zusammenfassung:

Gegeben: n (Mess)-Wertepaare (x_i, y_i) $i=1, \dots, n$

Die Steigung der Regressionsgeraden $y = ax + b$ berechnet sich aus folgender Formel:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2} \quad \bar{x}, \bar{y} \text{ arithm. Mittel}$$

$$b = \bar{y} - a \bar{x}$$

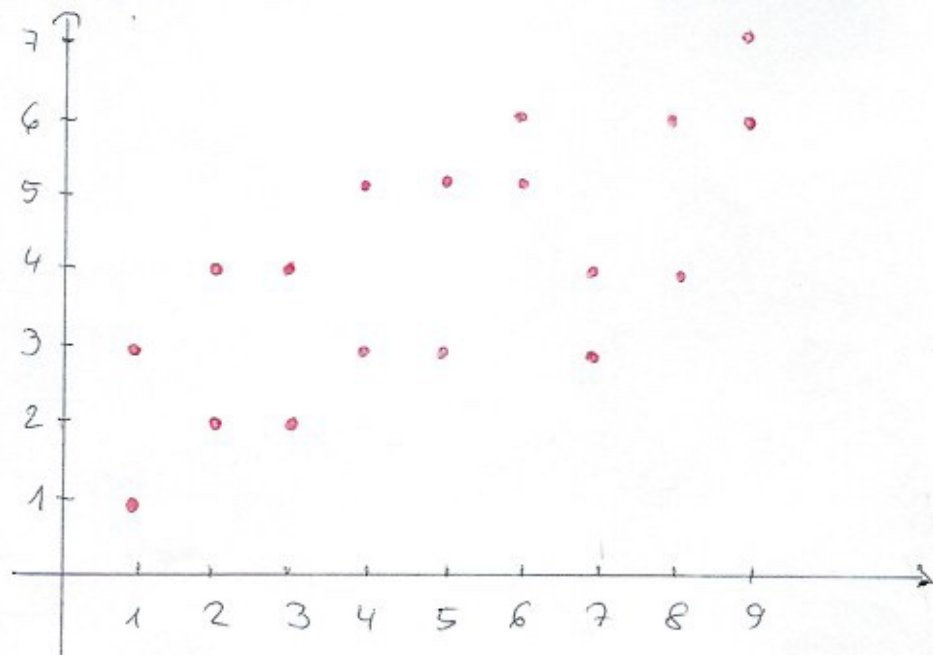
Beispiel:

Folgende Werte wurden gemessen:

x_i	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9
y_i	1	3	2	4	2	4	3	5	3	5	5	6	3	4	4	6	6	7

$n = 18$

$n=18$



Versuchen Sie, mit Augenmaß eine Gerade zwischen die Punkte zu legen, die die Punkte am besten annähert.