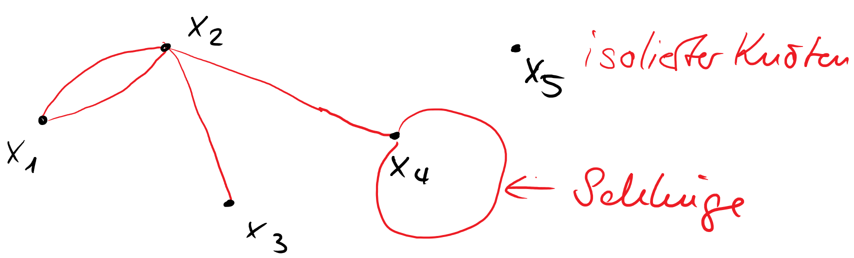
# Vorlesung Mathematik 2
## 21.6.2023

Def: Zwei durch eine Kante verbundene Knoten heißen adjazent

Def: Die Kante, die zwei benachbarte Knoten verbindet, heißt inzident




Def: (Knotengrad)

Die Anzahl der mit einem Knoten $x_i$ inzidenten Kanten, heißt der Grad des Knotens  Schreibweise $d(x_i)$

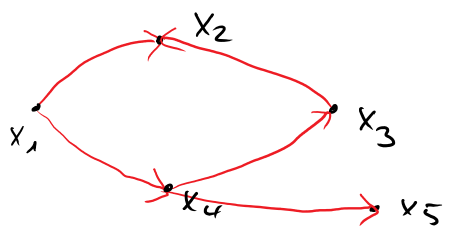
dabei zählen Schlingen doppelt

Bem: Knotengrad in gerichteten Graphen (Digraph)

$d^+(x_i)$ Ausgangsgrad (in $x_i$ beginnenden "Pfeile")

$d^-(x_i)$ Eingangsgrad (in $x_i$ ankommende "Pfeile")

Bp:




$d^+(x_1) = 2$  $d^-(x_1) = 0$

$d^+(x_2) = 0$  $d^-(x_2) = 2$

$d^+(x_3) = 1$  $d^-(x_3) = 1$

$d^+(x_4) = 2$  $d^-(x_4) = 1$

$d^+(x_5) = 0$  $d^-(x_5) = 1$

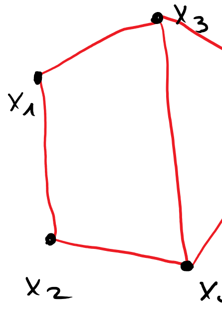
Def: zusammenhängender Graph

Ein gewöhnlicher (nicht gerichteter) Graph heißt zusammenhängend, wenn es zu je zwei Knoten $x_i, x_k$ stets eine Kantenfolge (einen "Weg") von $x_i$ nach $x_k$ gibt.

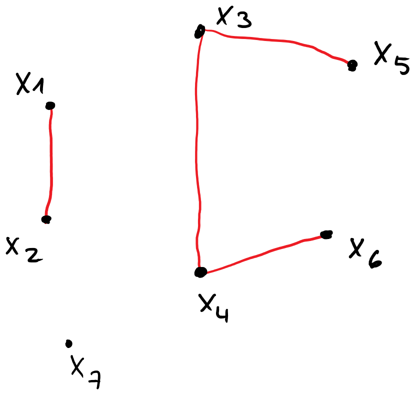
Also: keine isolierten Knoten

Zusammenhangskomponente eines Knotens: alle Knoten, die von diesem Knoten über Wege erreichbar sind.

Bp:



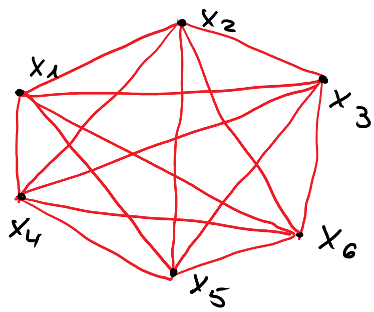

zusammenhängend



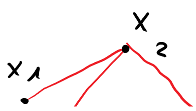

2 Zusammenhangskomponenten
+ 1 isolierter Knoten

Def: (vollständiger Graph)

Ein gewöhnlicher Graph heißt vollständig, wenn jeder Knoten mit jedem anderen Knoten eine direkte Kantenverbindung hat.

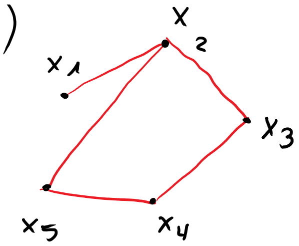



Def. (Untergraph)

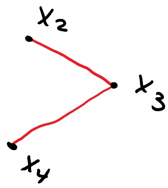



Untergraph durch Weglassen von

**Def. (Untergraph)**

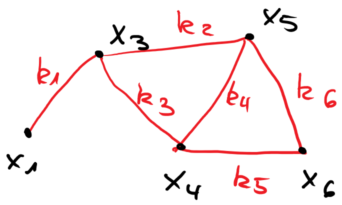


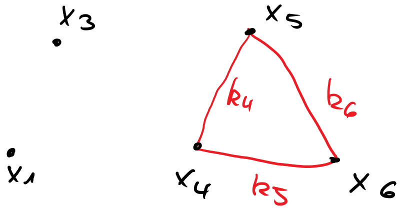

Untergraph durch Weglassen von $x_1$ und $x_5$




**Def (Teilgraph)**

entsteht aus einem Graphen, in dem nur Kanten weggelassen werden



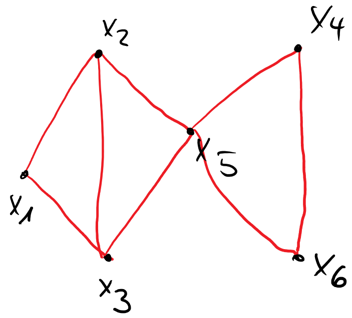




$k_1, k_2, k_3$ weg

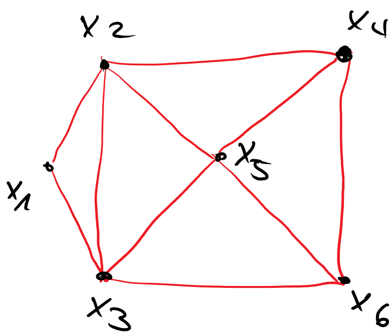
**Def. (trennender Knoten) (Artikulationspunkt)**

$x_i$ heißt trennend, wenn nach Herausnahme von $x_i$ und aller mit $x_i$ inzidierenden Kanten der Restgraph in mehrere Zusammenhangskomponenten zerfällt.

Bsp.

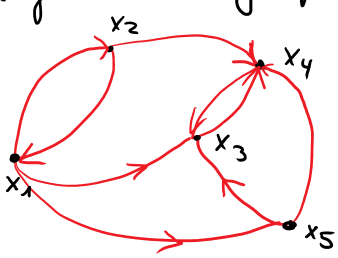



$x_5$ Artikulationspunkt




keinen Artikulationspunkt

**Def: (gerichteter Graph) Digraph**



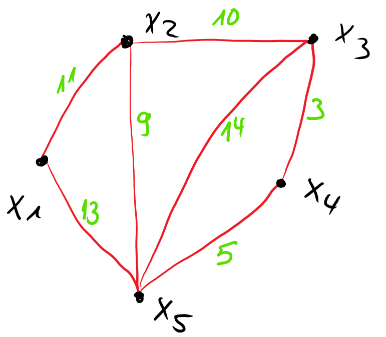

Richtung des Durchlaufens des Graphen wird durch Pfeile angegeben

**Def: (bewerteter Graph) (= gewichteter Graph)**

Jeder Kante $k \in K$ eines Graphen $G = (M, K, V)$

wird nun eine reelle Zahl $f(k) \in \mathbb{R}$ zugeordnet.
$f(k)$ heißen die Kantenwerte

Bp.




NB: gewöhnlicher Graph
keine Mehrfachkante
und keine Schlingen

Matrizendarstellung von Graphen

Transformation eines Graphen in eine Matrix

Def: Geg. $G = (M, K, v)$ ungerichteter gewöhnlicher Graph mit $n$ Knoten

Die quadratische Matrix $A = (a_{ij})$ $i = 1, \dots, n$

$$\text{mit } a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x_i x_j \text{ Kante von } G \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

heißt Adjazenzmatrix

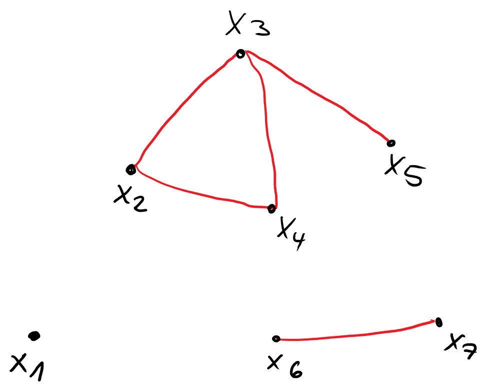
A ist symmetrisch

NB: Für Digraphen gilt $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{wenn die Kante von } x_i \text{ nach } x_j \text{ geht} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

Für bewertete Graphen gilt: $a_{ij} = \begin{cases} \text{Bewertung von } x_i x_j, & \text{wenn } x_i x_j \text{ Kante} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Bp:

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$




Def: (Inzidenzmatrix)

Geg. Graph $G$ mit Knoten $x_i$ $i = 1, \dots, n$

mit Kanten $k_j$ $j = 1, \dots, k$

$B$ sei die $(n \times k)$-Matrix mit $b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } k_j \text{ mit } x_i \text{ inzidiert} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

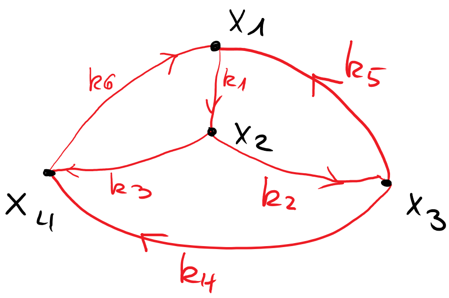
Im Falle eines Digraphen ist

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } k_j \text{ von } x_i \text{ ausgeht} \\ -1 & \text{wenn } k_j \text{ in } x_i \text{ ankommt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

B heißt die Inzidenzmatrix

Bp:

4 Knoten
6 Kanten




$$B = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & k_5 & k_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$4 \times 6$ - Matrix

Volle Information über den Graphen