

Vorlesung Mathematik 2 26.6.23

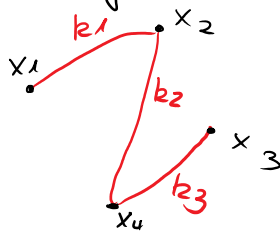
Inzidenzmatrix

bildet den Zusammenhang zwischen Knoten und Kanten ab

Kantenfolge, Weg

Def: Kantenzug

Eine Folge von inzidenten Kanten



Kantenfolge:

k_1, k_2, k_3

Kantenweg: x_1, x_2, x_4, x_3

Bem: Ist der Anfangsknoten gleich dem Endknoten: Zyklus oder Kreis

Satz: Sei $G = (M, K, V)$ ein beliebiger Graph

$$\text{Beh: } \sum_{a \in M} d(a) = 2|K|$$

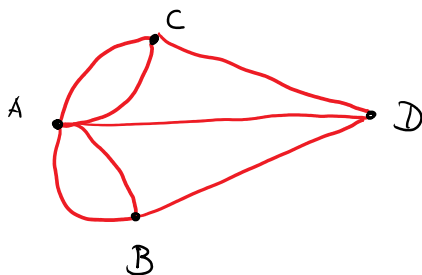
Summe der Knotengrade

doppelte Kantenzahl

Def: Eulerzug, Euler'sche Linie

Ein Kantenzug, der jede Kante eines Graphen genau einmal enthält, heißt Eulerzug

Satz (Euler 1736)

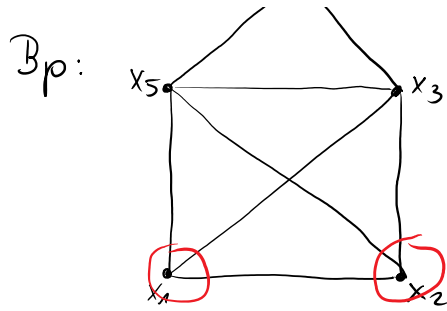


Ein endlicher, ungerichteter, nicht notwendig
Schlichter Graph $G = (M, K, V)$ besitzt
eine Euler'sche Linie

$\Leftrightarrow G$ ist zusammenhängend

Die Zahl der Knoten mit ungeradem
Knotengrad ist höchstens 2



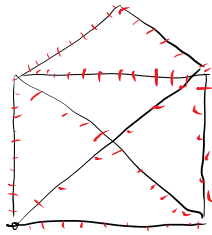


Achtung: Weg beginnt bei x_1
oder x_2
(ungerader Knotengrad)

Algorithmus zur Konstruktion eines Eulerzuges

Algorithmus von Fleury

- 1) Man geht von einem beliebigen Startknoten aus
- 2) Wähle benachbarte Knoten und entferne die durchlaufenen Kanten
Entferne Anfangsknoten, falls dieser isoliert ist.
Der Restgraph muss zusammenhängend sein, sonst: kein Eulerzug
Falls Rest leer: Zug gefunden
- 3) Alle entfernten Kanten ergeben in der Reihenfolge des Entferneins einen Eulerzug.



Entfernen

Def: Hamilton'sche Linie

Ein Weg, der jeden Knoten eines Graphen genau einmal enthält

Spezielles Problem:

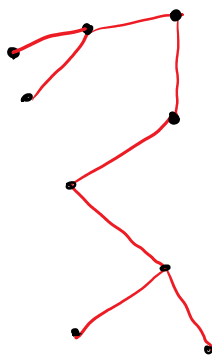
Problem des Handlungsreisenden

Es sollen z.B. alle Städte eines Kreises genau einmal besucht werden: bisher noch nicht gelöst in der Mathematik

Bäume und Wälder

Def. (Baum)

Ein zusammenhängender Graph ohne geschlossene Kantenföge, in dem je zwei Knoten durch genau einen Weg verbunden sind.



Baum



Baum

Wald

Bem: In jedem Baum ist x_i mit $d(x_i) > 1$ ein freuender Knoten (= Artikulationspunkt)

Bem: die Knoten x_i mit $d(x_i) = 1$ heißen Randknoten oder Blätter

Satz: Ein Baum mit n Knoten hat genau $(n-1)$ Kanten

Beweis: durch vollständige Induktion

Satz: Folgende Aussagen sind äquivalent:
(1) G ist ein Baum

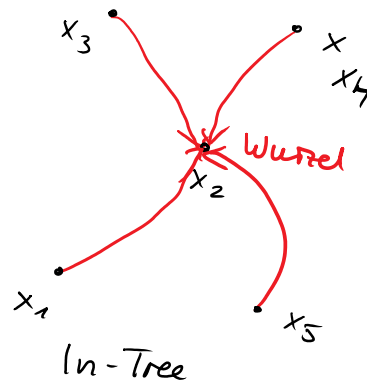
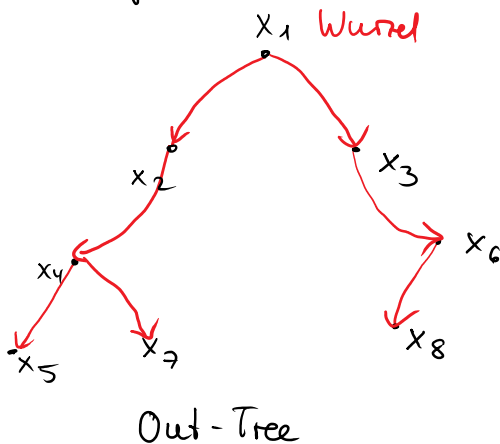
- (1) G ist ein Baum
- (2) Zwischen je zwei Knoten enthält G genau einen Weg
- (3) G ist minimal zusammenhängend, wird eine Kante "aus der Mitte" entfernt, zerfällt der Zusammenhang.
- (4) G ist maximal zyklunfrei

Wo findet man Bäume?

Wahrscheinlichkeitsbäume
Suchalgorithmen in der Informatik
Stammbäume

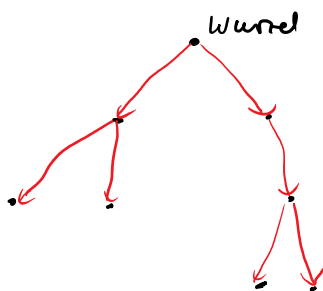
Def: Wurzelbäume

Ein gerichteter Graph, der ein Baum ist und der eine "Wurzel" hat



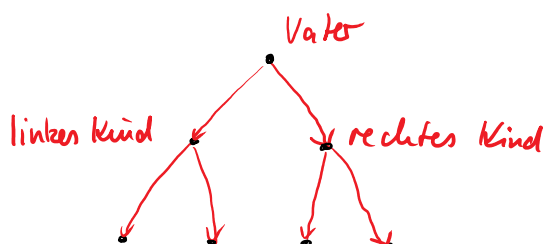
Def: Höhe eines Wurzelbaums

maximal mögliche Länge von der Wurzel zum Blatt

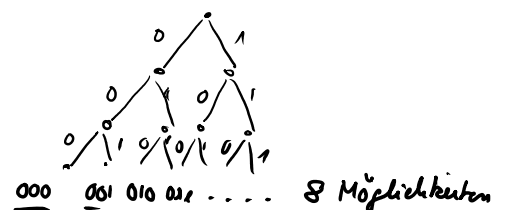


Anzahl der durchlaufenen Kanten: 3
" " " Knoten: 4

Besondere Wurzelbäume: Binärbäume



Bp: $n = 3$



Wichtige Anwendung : Huffman - Code (David Huffman 1925-1999)

Idee : häufig vorkommende Zeichen haben kürzeren Code

Forderung : kein Code darf Beginn eines anderen Codes sein
präfixfreier Code

Bp : 0 , 10 , 11 präfixfrei
0 , 01 , 10 nicht präfixfrei

Was hat das mit einem Binärbaum zu tun?

Darstellung des Codes : Binärbaum

Blätter des Baumes : die zu codierenden Zeichen

Pfad von der Wurzel zum Blatt heißt den Code

Aufbau des Baumes

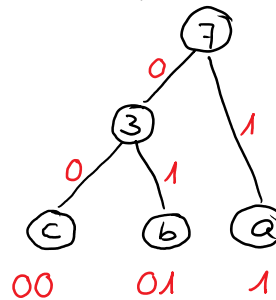
- 1) Ermitteln der Häufigkeit der Buchstaben und Zeichen, die vorkommen
- 2) Jeder Buchstabe und jedes Zeichen wird zu einem Blatt
- 3) Die beiden Blätter mit der geringsten Häufigkeit werden zusammengefasst
Der neue innere Knoten enthält die Summe der beiden "Blatthäufigkeiten"
- 4) Jetzt werden wieder die beiden Knoten mit der geringsten Häufigkeit wieder zusammengefasst
- 5) Solange wiederholen, bis alle Buchstaben und Zeichen abgearbeitet sind.

Kleines Beispiel :

Häufigkeiten

a	b	c
4	2	1

abacaba



c	1	] (3) [
b	2	
a	4	

] (7) [

zu Hause : Codieren Sie :

MISSISSIPPI_IST_MISSISSIPPI