Vorlesung Mathematik 2 28.6.23

Wo findet man noch Binärbäume?

Binärer Suchbaum (BST: **B**inary **S**earch **T**ree)

Knoten tragen den Schlüssel "kleiner gleich" "größer gleich"
linker Teilbaum rechter Teilbaum

"kleiner" bzw. "größer" gleich: vom Anwender festzulegen

Allgemein: – Jeder Knoten besitzt einen Schlüssel, für den eine Ordnung definiert sein muss
– Für jeden inneren Knoten gilt: alle Schlüssel in den Knoten des linken Teilbaums sind "kleiner", alle des rechten Teilbaums sind "größer"

Suche allgemein:

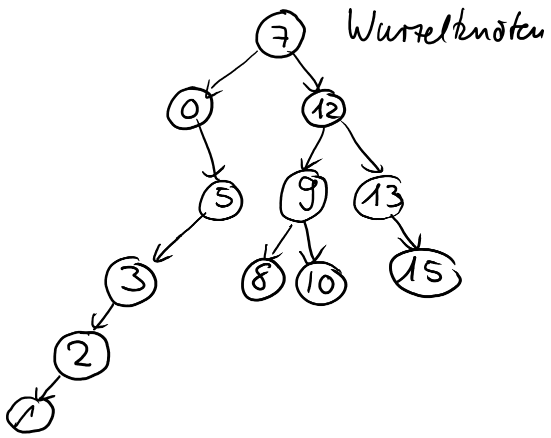
s Schlüssel

$s < x$: Suche im li. Teilbaum
$s > x$: " " re. "

$s = x$: Suche beendet

Bp: Geg: $[7, 12, 0, 5, 9, 3, 8, 2, 13, 10, 15, 1]$

Zahlen sind der Schlüssel



Suche 3

$3 < 7$
li Teilb.

$3 > 0$
re Teilb.

$3 < 5$ li Teilb.

$3 = 3$ Ziel erreicht

Umfang der Suche

Baum mit Höhe H (H Anzahl der Knoten im längsten Weg)

maximal $V = H$ Vergleiche Knotenzahl: maximal $N = 2^H - 1$

maximal $V = H$ Vergleiche

Knotenzahl: maximal $N = 2 \; -1$

Frage: Wieviel Einträge sind bei 10 Vergleichen speicherbar?

$$N = 2^{10} - 1 = 1024 - 1 = 1023$$

Weitere Beispiele:

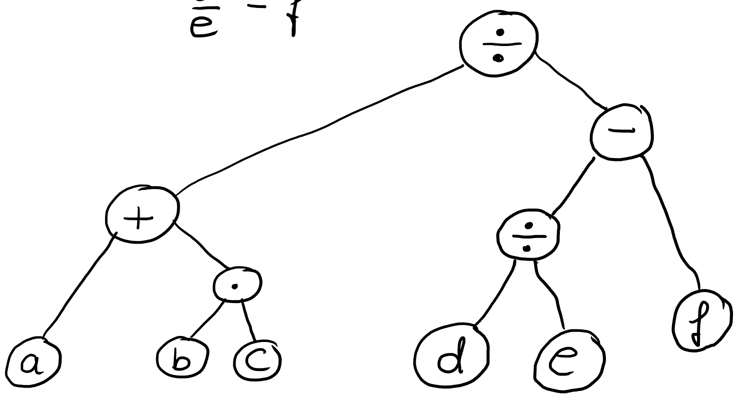
Darstellung arithmetischer Ausdrücke durch Binärbäume

Innere Knoten: Operatoren

Blätter: Variablen, Konstanten

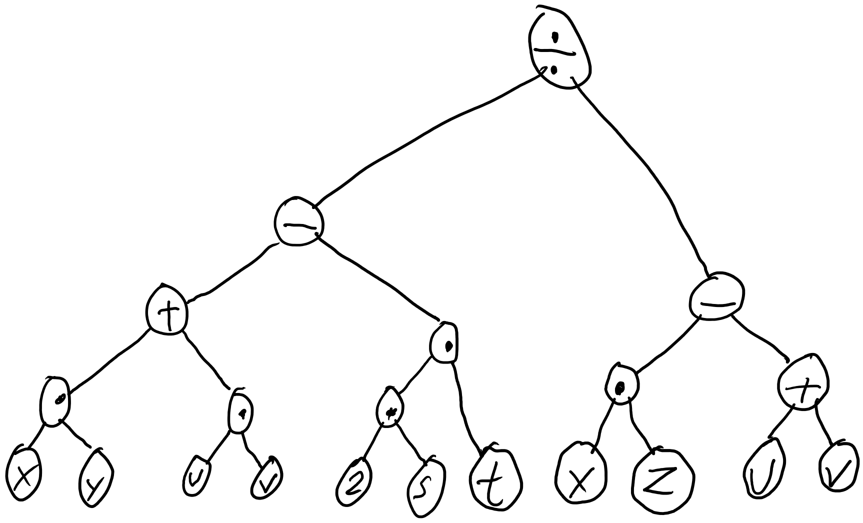
Bp:

$$\frac{a + b \cdot c}{\frac{d}{e} - f}$$



Bem: Zähler immer "links"

2. Bp:
$$\frac{x \cdot y + u \cdot v - 2 \cdot s \cdot t}{x \cdot z - (u+v)}$$

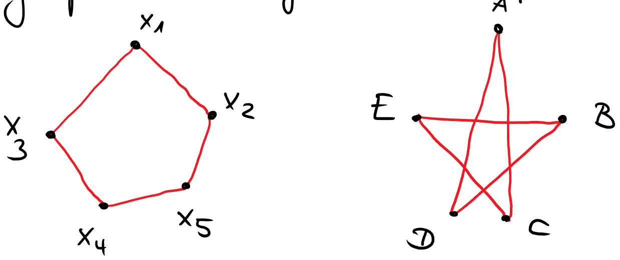


Nachtrag

Def: Isomorphe Graphen Iso = gleich

Graphen mit gleichem Bauprinzip

Bp: (Prof. Konen)



Es gilt in beiden Graphen Knotengrad immer 2

Zwei Graphen heißen isomorph $\Leftrightarrow$ es ex. bijektive Abbildung φ von der Knotenmenge eines Graphen G in die Knotenmenge eines Graphen G', so dass gilt:

$\{x_i, x_j\}$ Kante von G $\Leftrightarrow$ $\{\varphi(x_i), \varphi(x_j)\}$ Kante von G'

Im Bp:

$\varphi(x_1) = A$ $\varphi(x_3) = D$

$\varphi(x_2) = C$ $\varphi(x_4) = B$

$\varphi(x_5) = E$

Nachtrag zum Thema Adjazenzmatrizen

Ob ein Kantenzug von einem Knoten x_i zu einem Knoten x_k z.B. der Länge 2 existiert, kann mit Hilfe der Potenzen der Adj.matrix A festgestellt werden.

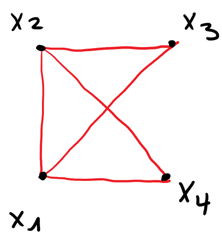
$$A \cdot A = A^2 \qquad x_{ik}^{(2)} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\, x_{jk}$$

$\uparrow$ Koeffizient in der i-ten Zeile und der k-ten Spalte in A^2

diese Summe zählt genau die Anzahl der Kantenzüge der Länge 2 von x_i nach x_k

$x_{ij} \cdot x_{jk}$ ist genau dann 1, wenn der Kantenzug von x_i über x_j nach x_k existiert

Bp.:



$$\begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline x_1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ x_2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ x_3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_4 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}}_{A^2}$$

Es gibt 2 Kantenzüge der Länge 2 von x_1 nach x_2 in dem Graphen:

$x_1 x_4 x_2$

oder $x_1 x_3 x_2$

Es gibt 2 Kantenzüge der Länge 2 von x_3 nach x_3

$x_3 x_2 x_3$ $\quad$ $x_3 x_1 x_3$

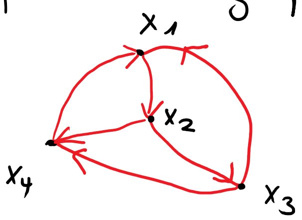
(Diagonale)

Es gilt:

Sei A die Adj.matrix von G

Der Koeffizient in der i-ten Zeile und der k-ten Spalte $x_{ik}^{(m)}$ in A^m gibt die Anzahl der Kantenzüge der Länge m von x_i nach x_k

Bp. für einen Digraphen



$$A = \begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline x_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ x_3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ x_4 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ \boxed{2} & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2 Wege der Länge 2 von x_2 nach

x_3 $\qquad$ $x_4 \; 1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0$

2 Wege der Länge 2 von x_2 nach x_1

$x_2 \to x_3 \to x_1$

$x_2 \to x_4 \to x_1$

Wenn ein Digraph ein Zyklus enthält,

dann wird A^r niemals die Nullmatrix sein.

Ein Digraph mit n Knoten ist azyklisch (zyklenfrei) $\iff$ es ex. r mit $1 \le r \le n$ und $A^r \neq \underbrace{0}_{\text{Nullmatrix}}$ und $A^s = 0$ mit $s > r$

Durchlaufen von Graphen

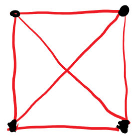
Def. (aufspannender Baum, Gerüst)

Ein zusammenhängender Teilgraph eines zusammenhängenden Graphen mit minimaler Kantenzahl

Bem: Es werden nur Kanten weggelassen

"Spanning Tree"

Bsp:



Cayley-Formel: Ein vollständiger Graph mit n Knoten hat n^{n-2} aufspannende Bäume.

hier: $n = 4$ Knoten

4^{4-2} aufspannende Bäume

Weitere 12 bitte zu Hause ergänzen