

## Übungsblatt 8 Komplexe Zahlen + DGL

In den nachfolgenden Aufgaben bezeichnet  $i$  jeweils die imaginäre Einheit.

### Aufgabe 8.1 Rechnen mit komplexen Zahlen

Berechnen Sie:

- a)  $6+4i - (5 - 2i)$
- b)  $4i + 2i^2 - i(3 + 5i)$
- c)  $|10 + 8i| - |10 - 8i|$
- d)  $\frac{4i + 2i^2}{3 - 2i}$
- e)  $\frac{i}{5 + 2i}$

Hinweis: Der Bruch zweier komplexer Zahlen „Zähler durch Nenner“ wird berechnet, indem man mit dem komplex-konjugierten Nenner erweitert:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot z_2^*}{z_2 \cdot z_2^*}$$

### Aufgabe 8.2 Darstellungsformen komplexer Zahlen

Ergänzen Sie die jeweils fehlenden Darstellungsformen

	kartesische Form	Polarform	
		trigonom. Form	Exponentialform
a)	$i$		
b)			$2e^{i\pi}$
c)		$\cos(\frac{3}{2}\pi) + i\sin(\frac{3}{2}\pi)$	
d)	$-3 + 6i$		
e)	$4 - 12i$		

### Aufgabe 8.3

- a) Man berechne Real- und Imaginärteil von

$$z_1 = (1 - \sqrt{3} \cdot i)^5 \quad \text{und} \quad z_2 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + i) \right)^{20}$$

- b) Gegeben ist  $Z = -8 + 8i\sqrt{3}$ . Man berechne  $\sqrt[4]{Z}$ .

Bereiten Sie die Aufgaben für den 22.05.2023 so vor, dass Sie in der Lage sind, Ihre Lösungen vorzutragen.

#### Aufgabe 8.4 Graphisches Rechnen mit komplexen Zahlen

Gegeben sind die beiden komplexen Zahlen:  $z_1 = 1 - 5i$  ;  $z_2 = 4 + 3i$  .

- Addieren und subtrahieren Sie die Zahlen graphisch in der Gaußschen Zahlenebene. Zeichnen Sie die konjugiert komplexe Zahl zu  $z_1$  ebenfalls ein.
- Man stelle  $z_1$  und  $z_2$  in Exponentialform dar. Bilden Sie nun  $z_1^2$ ,  $\sqrt[3]{z_1}$ ,  $z_1 \cdot z_2$  ebenfalls mit graphischen Methoden.

#### Aufgabe 8.5 (A) Komplexe quadratische Gleichung

$\lambda$  sei eine beliebige reelle Zahl. Bestimmen Sie die zwei komplexen Lösungen der folgenden Gleichung mittels quadratischer Ergänzung:

$$z^2 - (\lambda - 2i)z - (1 + \lambda i) = 0$$

Ermitteln Sie Real- und Imaginärteile von  $z_{1,2} \in \mathbf{C}$ .

#### Aufgabe 8.5 (B) Additionstheoreme

- Leiten Sie die "normalen" Additionstheoreme

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

aus der Eulerschen Formel (Satz S 11-3) her.

- Leiten Sie die Additionstheoreme

$$\cos(3\varphi) = \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi$$

$$\sin(3\varphi) = 3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi$$

aus dem Satz von Moivre (Satz S 11-5) her

#### Aufgabe 8.6 DGL mit nur einem Ableitungsterm

Die Beschleunigung einer Kugel in einem Computerspiel sei gegeben durch die Differentialgleichung

$$s''(t) = -2t + 5$$

- Interpretieren Sie die Differentialgleichung (Ordnung, Linearität, Homogenität), jeweils mit einem Begründungssatz.
- Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung. Wieviel freie Parameter hat sie?
- Lösen Sie die Differentialgleichung für die Anfangsbedingungen  $s(0) = 1$ ,  $s'(0) = 2$ .

Bereiten Sie die Aufgaben für den 22.05.2023 so vor, dass Sie in der Lage sind, Ihre Lösungen vorzutragen.

**Aufgabe 8.7 Anfangswertproblem**

Ermitteln Sie die Lösung des Anfangswertproblems (Ansatz:  $x(t)=e^{\lambda t}$ ,  $\lambda \in \mathbf{C}$ )

$$x''(t) + 4x'(t) + 3.75x(t) = 0, \quad x'(0) = 4, \quad x(0) = 0$$

**Aufgabe 8.8 Lineare DGL**

(a) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der DGL (Ansatz:  $y(t)=e^{\lambda t}$ ,  $\lambda \in \mathbf{C}$ )

$$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = 0$$

(b) Ermitteln Sie die spezielle Lösung für  $y(0) = -1-2i$  und  $y'(0)=5$ .

(c) Machen Sie die Probe, ob die spezielle Lösung die DGL löst.