Mathematik II – Übungsblatt 9 SS 2023 Prof.Dr.W. Konen, Dr. A.Schmitter

Bereiten Sie Ihre Lösungen sorgfältig vor und teilen Sie per mail (ane.schmitter at th-koeln.de) mit, welche Aufgaben Sie in der Übung vortragen möchten.

Aufgabe 1

Gegeben sei a) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ b) $f(x,y)=\sqrt{64-x^2-y^2}$

c) $f(x,y)=x^2-y+2$

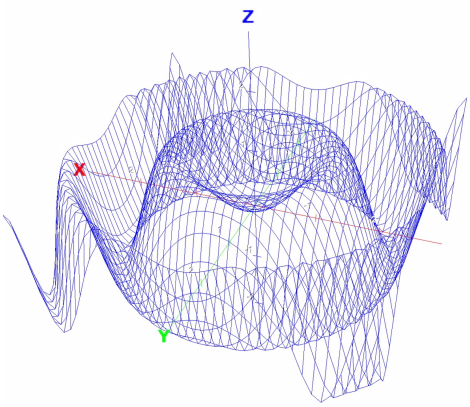
Bestimmen Sie für diese Funktionen die Gleichungen der *Höhenliniendiagrammkurven* und der *Schnittkurven* (Schnittebenen parallel zur x,z-Ebene bzw. y,z-Ebene) für z_0 , y_0 bzw. x_0 = 0,1,2,3,4.

Versuchen Sie, eine 3D-Skizze zu erstellen und beschreiben Sie dann die durch f dargestellte Fläche im dreidimensionalen Raum.

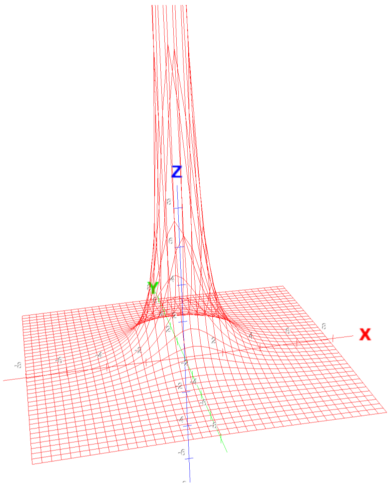
Aufgabe 2

Nachfolgend sind sechs graphische Darstellungen von 3D-Funktionen zu sehen. Überlegen Sie sich zu jeder einzelnen, wie die Funktionsgleichung aussehen könnte. Betrachten Sie dazu den Funktionswert an der Stelle (x,y)=(0,0), dann betrachten Sie, wie die Funktionswerte für sehr große x und y aussehen. Schwanken die Funktionswerte? Aus der Kenntnis über Eigenschaften von Funktionen mit einer unabhängigen Variablen, sollten Sie zumindest sagen können, welche Funktionen eventuell in die Gleichung eingehen. Es wird nicht erwartet, dass Sie exakt die jeweilige Funktionsgleichung angeben, sondern nur etwas über die etwaige Gleichung aussagen.

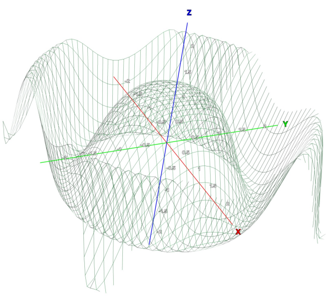
1)



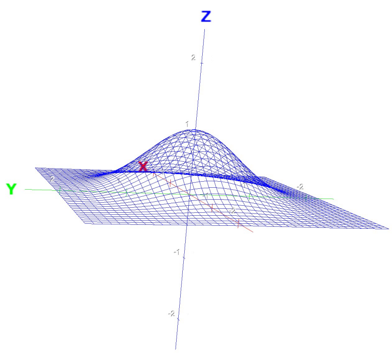
2)



3)



4)



Bereiten Sie Ihre Lösungen sorgfältig vor und teilen Sie per mail (ane.schmitter at th-koeln.de) mit, welche Aufgaben Sie in der Übung vortragen möchten.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die *partiellen Ableitungen 1.Ordnung* von folgenden Funktionen:

a) $f(x,y) = e^{-x}\cos y$ **b)** $f(a,b) = (ax + bx^2)^{-1} + ye^{ab}$ **c)** $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

d) $f(x,y,z) = e^x \ln y + z^2 \cos y$ **e)** $f(x,y) = x^3y - xy^2 - 2(x - 2y) + 1$ **f)** $f(x,y)=\cos(x+y)\cos(x-y)$

g) $f(x,y,z) = x(y + 2z - 6) + y(1 - z)$

Aufgabe 4

Berechnen Sie den Gradienten von nachfolgenden Funktionen erst allgemein, dann für die angegebenen Werte:

a) $f(x,y) = \dfrac{x}{3y - 2x}$ für x=1 und y=0

b) $f(x,y) = (3x + xy)^2$ für x=2 und y=4

c) $z = f(x,y) = \ln(x^2 + y^2) - e^{2xy} + 3x$ für x=0 und y=2

d) $f(x,y,\varphi) = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos\varphi}$ für x=1,y=1 und φ=π/3

Aufgabe 5

a) Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen 1. Ordnung von

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i^2 x_{i+1}^3$$

b) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma x_4^\delta e^{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}$

Aufgabe 6

Berechnen Sie mit Hilfe des totalen Differenzials die Oberflächenänderung eines Zylinders mit Boden und Deckel, dessen Radius r = 10 cm um 5 % vergrößert und dessen Höhe h = 25 cm gleichzeitig um 2 % verkleinert wurde. Vergleichen Sie diesen Näherungswert mit dem exakten Wert.

Aufgabe 7
Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y,z) = xy+yz+zx$$

Berechnen Sie das totale Differenzial an der Stelle (2,3,1) und schätzen Sie die Funktionswertänderung ab, wenn der Punkt nach (2,1 ; 3,2 ; 1,2) verschoben wird.

Aufgabe 8

Bestimmen Sie von folgenden Funktionen jeweils den Gradienten und die Hesse-Matrix:

a) $f(x,y,z) = \dfrac{xz^2}{y}$ b) $f(x,y) = x\ln y + y^x$

Aufgabe 9

Wie lautet die Gleichung der Tangentialebene der Funktion

$$z = f(x,y) = x^2 \cdot e^{xy}$$

im Punkt $P_0(1;0;1)$?

Aufgabe 10

In welchem Punkt ist die Tangentialebene der Fläche $z = 4 - x^2 - y^2$ parallel zur x-y-Ebene ?

Aufgabe 11

Bestimmen Sie die Extremwerte folgender Funktionen:

a) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 10$

b) $f(x,y) = x^2 - y^2$

c) $f(x,y) = 2x^3 - 3x^2 - 2y^3 + 3y^2$

Weisen Sie nach, ob es sich um einen Sattelpunkt, ein Maximum oder um ein Minimum handelt oder ob diese Eigenschaft nicht zutrifft.

Aufgabe 12

a) Untersuchen Sie, für welche Werte des Parameters a die folgende Funktion Minima und für welche Werte sie Maxima besitzt: $f(x,y) = -x^3 + 6axy - y^3$ $(a \neq 0)$

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x,y) = c - x^2 - y^2$ im Punkt (0,0) ein lokales Maximum besitzt.

Bereiten Sie Ihre Lösungen sorgfältig vor und teilen Sie per mail (ane.schmitter at th-koeln.de) mit, welche Aufgaben Sie in der Übung vortragen möchten.

Aufgabe 13

Bestimmen Sie mit Hilfe der *Methode von Lagrange* die Kandidaten für die relativen Extremwerte folgender Funktion:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4$$

unter der Nebenbedingung

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$$

Aufgabe 14

Bestimmen Sie mit Hilfe der *Methode von Lagrange* die Kandidaten für die relativen Extremwerte folgender Funktion:

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

unter den Nebenbedingungen

$x + y = 1$ und $y + z = -4$

Aufgabe 15

Berechnen Sie mit Hilfe der *Methode von Lagrange* für folgende Funktion f unter der Nebenbedingung g die Extremwerte und überprüfen Sie mit den in der Vorlesung vorgestellten hinreichenden Kriterien, welche Art von Extremwert vorliegt.

$$f(x_1,x_2,x_3) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3}$$

$$g(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_2 + x_3 - 3a = 0$$

Aufgabe 16

Bestimmen Sie die Gleichung der Regressionsgeraden für folgende Messpunkte, indem Sie den Ansatz y=ax+b wählen und für die entsprechende Funktion Q(a,b) der Summe der Abstandsquadrate mit den beiden unabhängigen Variablen a und b das Minimum bestimmen. Den Nachweis, dass es sich um ein Minimum handelt, müssen Sie nicht erbringen:

x_i	3	7	9	5	6
y_i	5	8	10	8	4