

Bildverarbeitung und Computer Vision

Prof. Dr. Wolfgang Konen

Filterung von Bildern (2D-Filter)



Aktivierung

Was, denken Sie, ist ein Filter in der BV? Welche Filter kennen Sie?

- neuer Pixelwert bilden aus Verknüpfung mit Nachbarwerten
- Tiefpass-, Hochpass-, Bandpass-Filter
- Glättungsfilter (Gauss, Box)

Inhalt

- **Filter im Ortsraum: Die Faltung**
- Tiefpass-Filter
- Filter im Frequenzraum: Fouriertransformation
 - 1D-Fouriertransformation
 - 2D-Fouriertransformation
- Anwendungen der Fouriertransformation (kurz)
 - Bandstop
 - Unsharp Masking

Filterung eines Bildes

Implementierungsalternativen (lineare Filter)

Bei der Filterung eines Bildes werden die Bildpunkte (Pixel) in Abhängigkeit von ihrer Nachbarschaft manipuliert.

□ Ortsraum

- Direkte Manipulation der Pixelwerte im Bildbereich

□ Frequenzraum

- Bildtransformation (z.B. Diskrete Fourier Transformation / DFT)
- Manipulation der Transformierten
- Rücktransformation in den Bildbereich

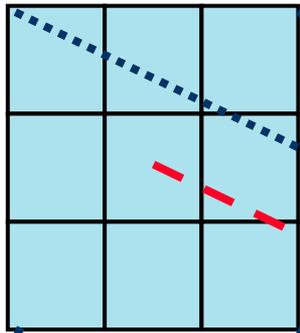
Viele Filteroperationen sind im Frequenzraum weniger aufwendig als im Ortsraum. Jedoch ist bei Filteroperationen, die nur eine kleine Bildnachbarschaft einbeziehen, der fixe Aufwand für die Bildtransformationen i.d.R. größer als der Aufwand für die Berechnung der Filterung selbst.

Prinzip der diskreten Faltung (Konvolution)

(Örtliche Faltung / Spatial Convolution)

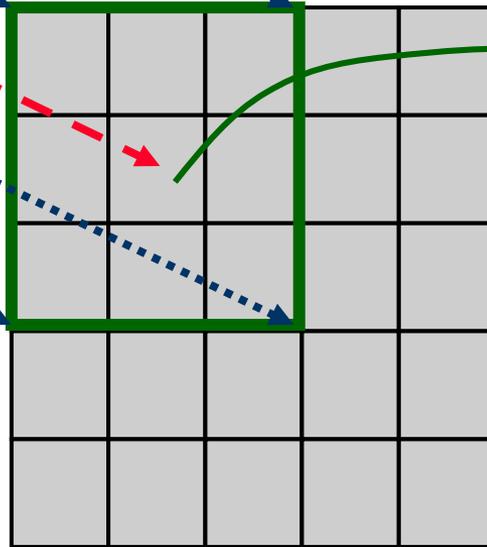
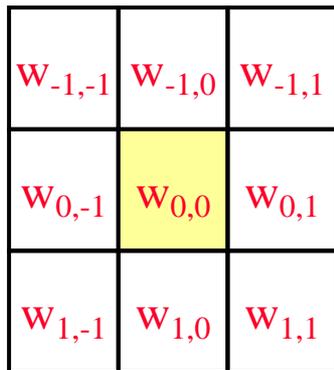
Filtermaske

(3 × 3)

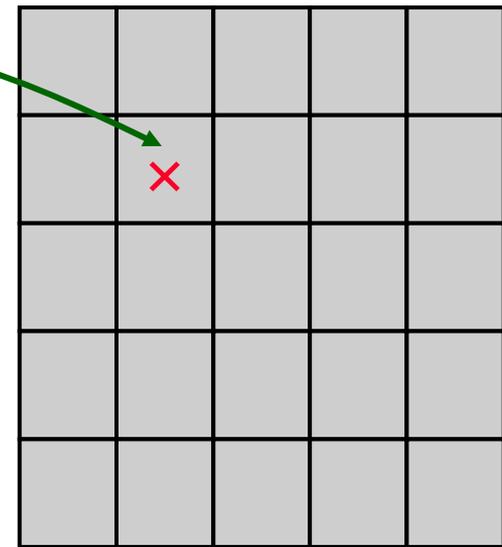


Bei der Faltung berechnet sich jeder Pixel des Ausgangsbildes als gewichtete Summe der Pixel einer Bildnachbarschaft.

Die Gewichte sind die Koeffizienten der Filtermaske (des Filterkerns).



Eingangsbild



Ausgangsbild

← Filterkoeffizienten (Gewichte)

Berechnung der diskreten Faltung

Eingangsbild $I_{i,j}$

$I_{0,0}$	$I_{0,1}$	$I_{0,2}$...	$I_{0,M}$
$I_{1,0}$	$I_{1,1}$...		
$I_{2,0}$...			
:				
$I_{N,0}$...			$I_{N,M}$

Filtermaske $M_{p,q}$

$M_{-1,-1}$	$M_{-1,0}$	$M_{-1,1}$
$M_{0,-1}$	$M_{0,0}$	$M_{0,1}$
$M_{1,-1}$	$M_{1,0}$	$M_{1,1}$

Maskengröße $W = 3$

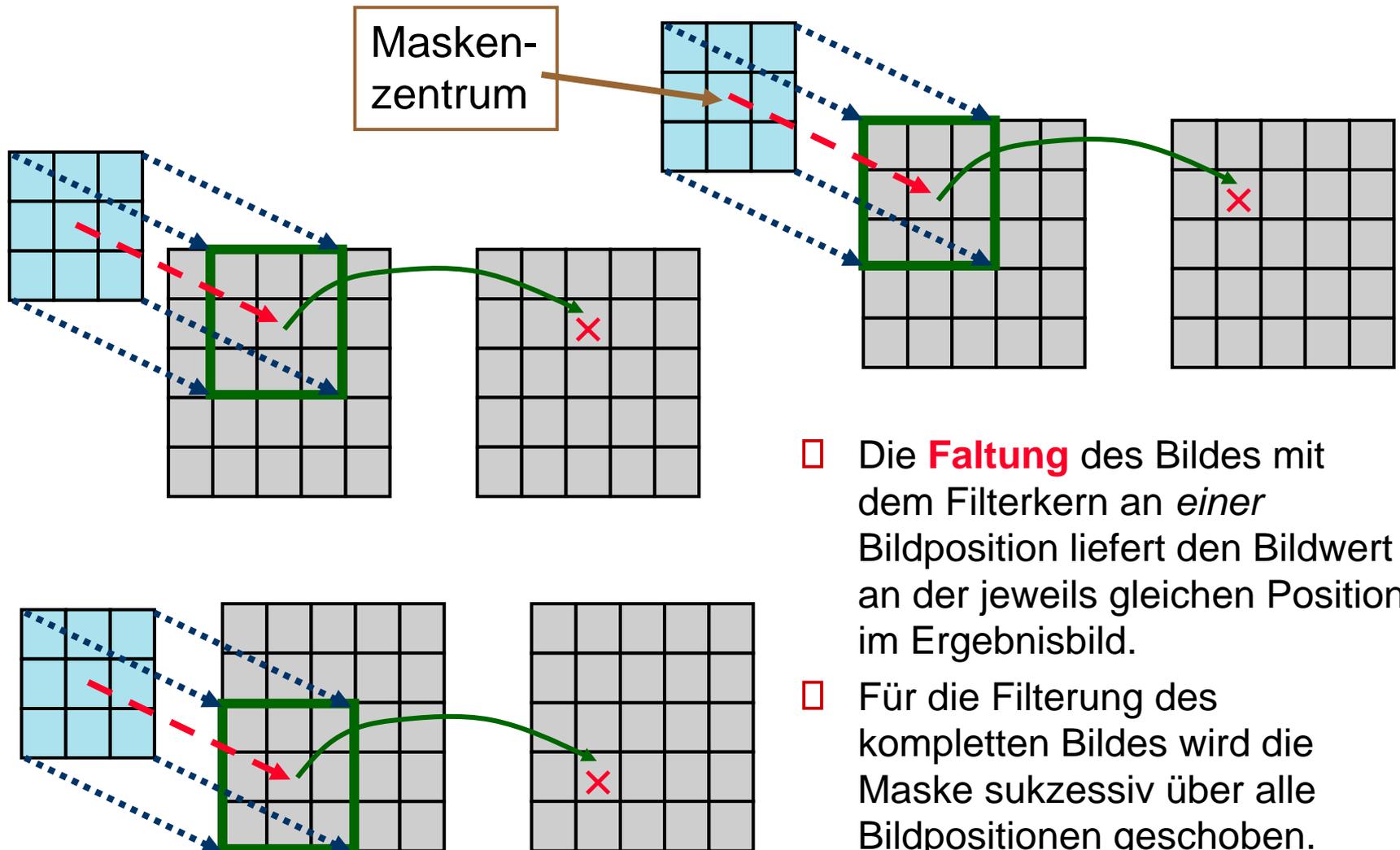
Ausgangsbild $O_{i,j}$

$O_{0,0}$	$O_{0,1}$	$O_{0,2}$...	$O_{0,M}$
$O_{1,0}$	$O_{1,1}$...		
$O_{2,0}$...			
:				
$O_{N,0}$...			$O_{N,M}$

$$O[i, j] = \sum_{p=-W/2}^{W/2} \sum_{q=-W/2}^{W/2} I[i-p, j-q] \cdot M[p, q]$$

$$O = I * M \quad (\text{Faltung})$$

Prinzip des Faltungsprozesses



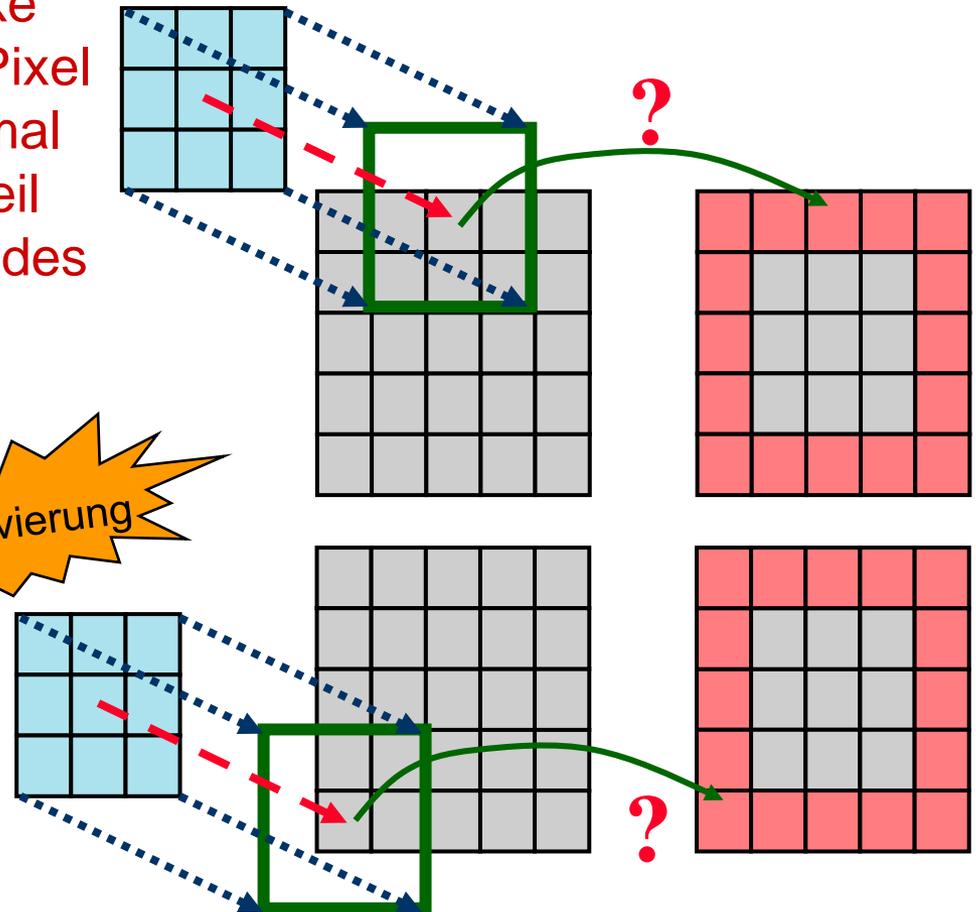
Konvolution mit Filtermasken

Randbetrachtungen

Je nach Größe der Filtermaske existiert ein Bildrand (min. 1 Pixel breit), dessen Pixel nicht normal berechnet werden können, weil ein Teil der Maske außerhalb des Eingangsbildes liegt.

Was sind gängige Methoden der Randbehandlung?

- am Rand kein Filter
- Zero- oder Grauwert-Padding
- Last-Value
- Periodische Fortsetzung
- Symmetrische Fortsetzung
- Interpolative Fortsetzung
- Konstruktion spezieller Filtermasken



Randbehandlung

©Burger2005



(a)



(b)



(c)

Zero- oder Grauwert-Padding

(Zero-Padding ist ImageJ's Default, wenn man getPixel an "out-of-bounds"-Positionen macht)

Last Value

(meist einfach und sinnvoll für Filter im Ortsraum)

Periodische Fortsetzung

(sieht unsinnig aus, aber z.B. die Fouriertransformation arbeitet so)

Inhalt

- Filter im Ortsraum: Die Faltung

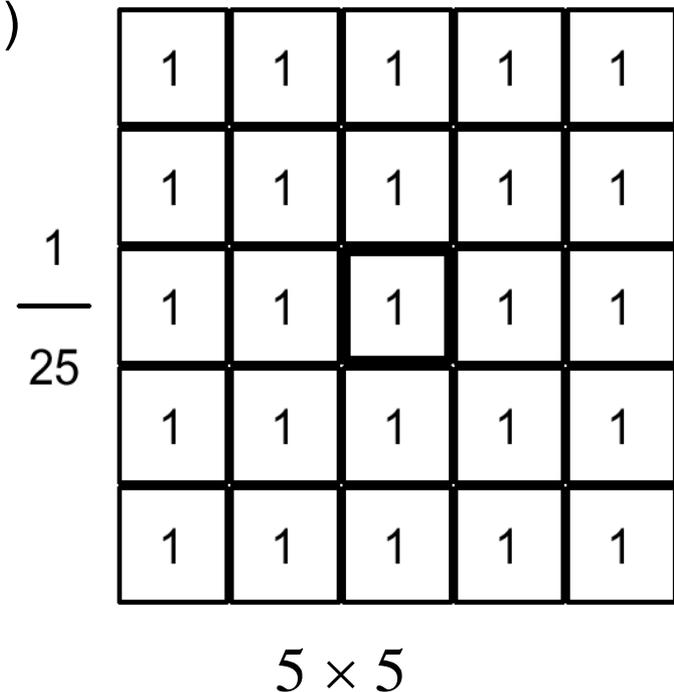
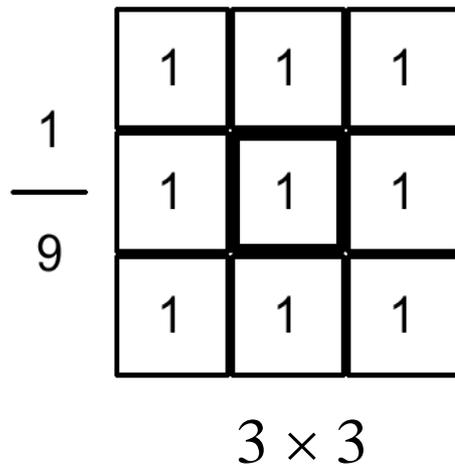
- **Tiefpass-Filter**

- Filter im Frequenzraum: Fouriertransformation
 - 1D-Fouriertransformation
 - 2D-Fouriertransformation

- Anwendungen der Fouriertransformation (kurz)
 - Bandstop
 - Unsharp Masking

Diskrete Tiefpass-Filter (Filtermasken)

- Glättungseffekt (Smoothing, Blur)
- Koeffizienten sind ausnahmslos positiv
- Koeffizienten sind normalisiert
(Summe aller Koeffizienten ergibt 1)
- Beispiel: **Mittelwertfilter**



Lineare und Separierbare Filter

- Ein Filter ist **linear**, wenn er Pixelwerte linear verknüpft.
Die **Faltung** ist ein linearer Filter
- Ein Filter heißt **separierbar**, wenn er in mehrere Faltungen aufgespalten werden kann: $O = I * M \Leftrightarrow O = I * M_1 * M_2$
- Der Mittelwertfilter ist x/y-separierbar, denn

$$M_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad M_2 = \frac{1}{3} [1 \quad 1 \quad 1]$$

liefert

$$M = M_1 * M_2 = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Mittelwertfilter (Beispiel)



Original

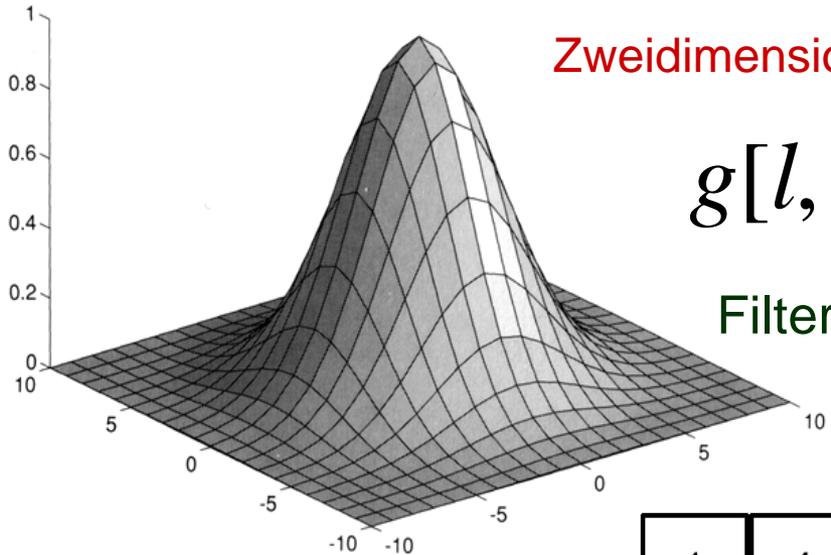


Filterungsergebnis
mit 3×3 Maske



Filterungsergebnis
mit 5×5 Maske

Gaußscher Glättungsfilter (Gaussian smoothing filter)



Zweidimensionale diskrete Gaußfunktion mit Mittelwert 1:

$$g[l, k] = e^{-\frac{(l^2 + k^2)}{2\sigma^2}}$$

Filtermaske:

$$M[p, q] = \frac{g[p, q]}{\sum_p \sum_q g[p, q]}$$

1	2	1
2	4	2
1	2	1

1
—
256

1	4	6	4	1
4	16	24	16	4
6	24	36	24	6
4	16	24	16	4
1	4	6	4	1

σ (sigma) =
"Filterbreite"

Gaußscher Glättungsfilter

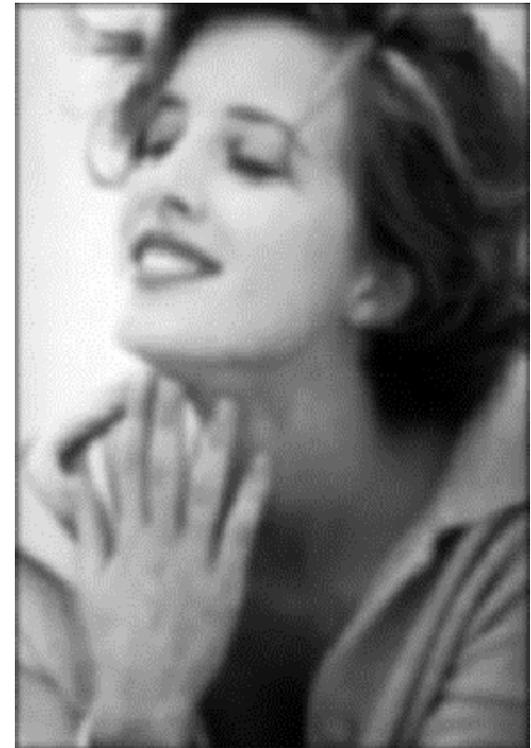
Beispiel



Original



$5 \times 5, \sigma = 1$



$9 \times 9, \sigma = 2$



Separierbarer Gauss-Filter

- Auch der Gauss-Filter ist x/y-separierbar. Überlegen Sie, wie die beiden Filter M_1 und M_2 aussehen müssen, um

$$\frac{1}{16} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 4 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

zu erzeugen

- Wie sieht's für den 5x5-Gauss-Filter aus?

Inhalt

- Filter im Ortsraum: Die Faltung
- Tiefpass-Filter
- **Filter im Frequenzraum: Fouriertransformation**
 - **1D-Fouriertransformation**
 - **2D-Fouriertransformation**
- Anwendungen der Fouriertransformation (kurz)
 - Bandstop
 - Unsharp Masking

Erzeugung einer Frequenzraumdarstellung (1)

Diskrete 1D Fourier-Transformation

Die eindimensionale diskrete Fourier-Transformation (FT) eines Signals $G(x)$ ist definiert als:

$$F(m) = \sum_{x=0}^{N-1} G(x) e^{-i \frac{2\pi m}{N} x}$$

Die Fourier-Transformation ist invertierbar (umkehrbar).
Das Originalbild kann durch Rücktransformation in den Ortsraum wieder hergestellt werden.

N ist die Signallänge und m ist die **Wellenzahl** (Wieviel volle Wellen passen in Signal hinein?)

e ist die Basis des natürlichen Logarithmus (ca. 2,71828) und $i = \sqrt{-1}$ ist die imaginäre Einheit für eine komplexe Zahl.

Exkurs: Komplexe Zahlen

Allgemeine Form einer komplexen Zahl:

1. Komponentendarstellung
(Realteil und Imaginärteil)
2. Darstellung durch Betrag und Winkel
in der komplexen Ebene

$$a + bi = R \cdot e^{i\alpha}$$

Betrag:

$$R = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Euler-Identität:

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$$

$$\Rightarrow e^{i0} = 1$$

$$e^{-i \frac{2\pi m}{N} x} = \cos\left(\frac{2\pi m}{N} x\right) - i \sin\left(\frac{2\pi m}{N} x\right)$$

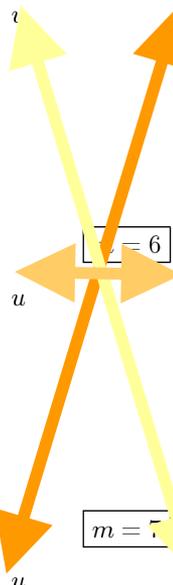
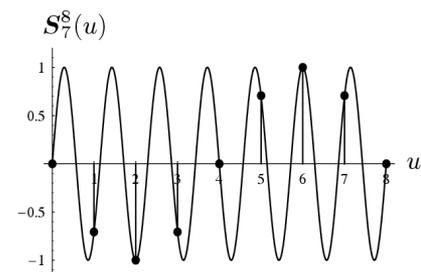
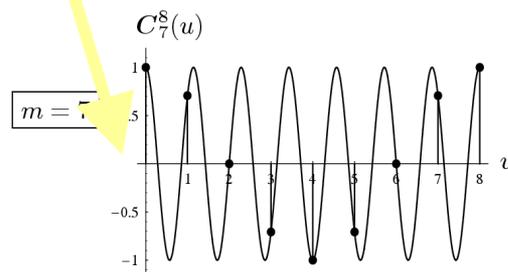
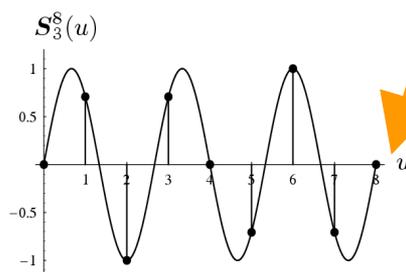
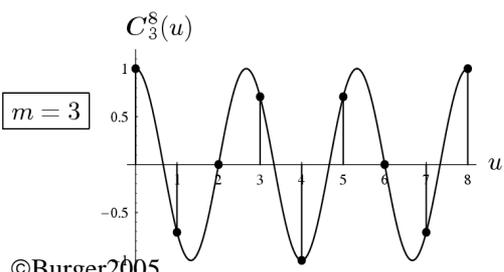
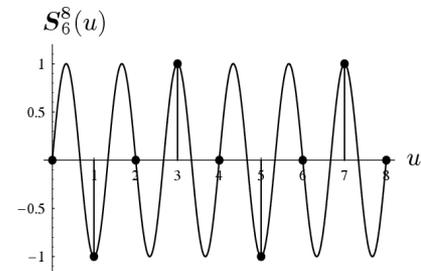
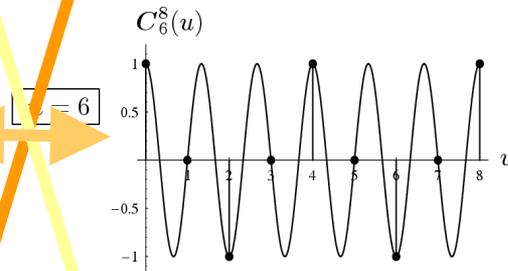
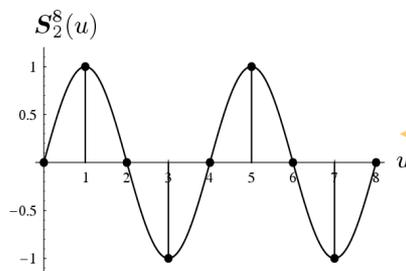
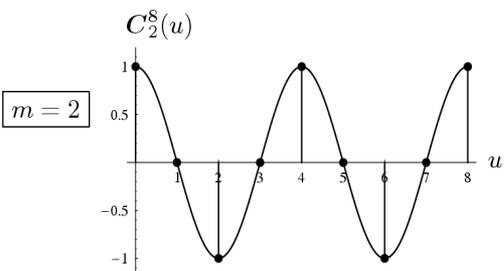
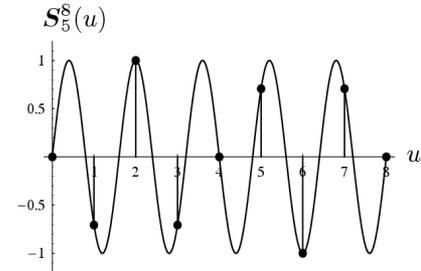
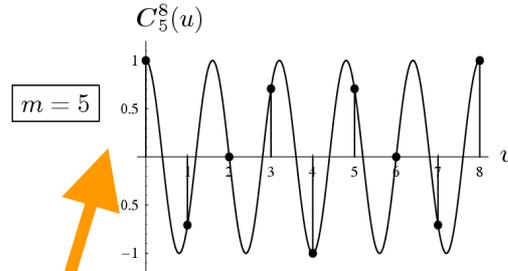
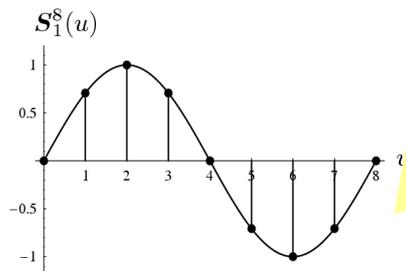
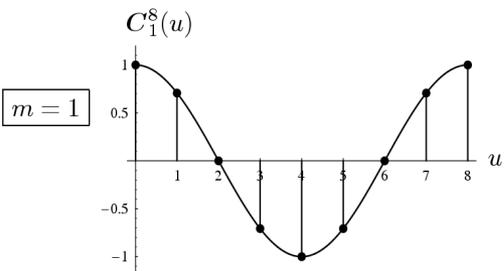
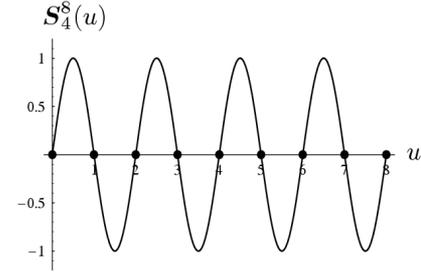
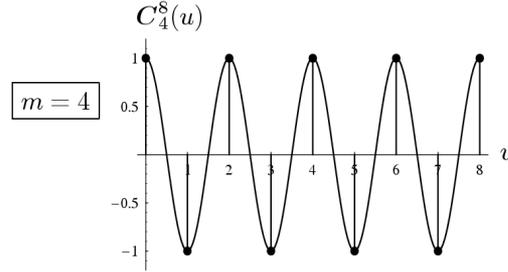
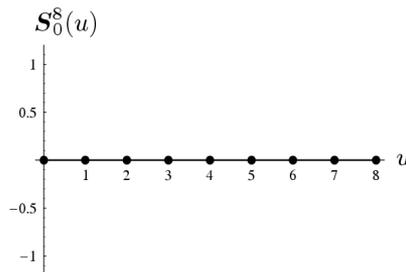
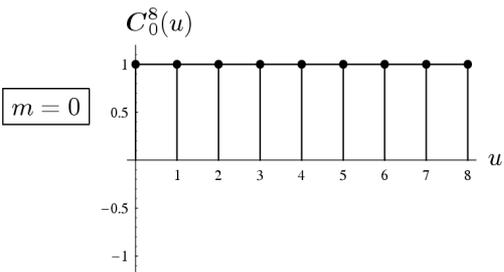
Abtastung und Aliasing für N=8

$$C_m^8(u) = \cos\left(\frac{2\pi m}{8}u\right)$$

$$S_m^8(u) = \sin\left(\frac{2\pi m}{8}u\right)$$

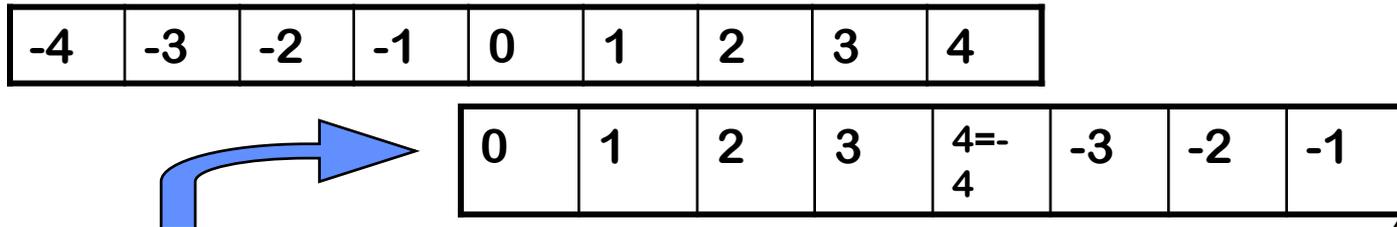
$$C_m^8(u) = \cos\left(\frac{2\pi m}{8}u\right)$$

$$S_m^8(u) = \sin\left(\frac{2\pi m}{8}u\right)$$



Eigenschaften der diskreten 1D-FT (1)

- Nur Frequenzen bis $m=-4, \dots, 0, \dots, +4$ erlaubt (bei $N=8$)
- Allgemein: $m=-N/2, \dots, 0, \dots, +N/2$
- Ausserhalb liegende Frequenzen werden in $-4, \dots, +4$ fälschlicherweise gemappt (**Aliasing, Nyquist-Theorem**): 5 auf 3, 6 auf 2 (genauer: -2)
- Anordnung Frequenzen physikalisch:



- Anordnung Frequenzen in FFT (genau 8 Pixel, wie in Signal). Man muss also mit Wrap-Around verschieben
- **$F(0)$ = Pixel-Summe des Signals $G(x)$**
- **$F(-N/2) = F(N/2)$**

Aktivierung:
Nachrechnen!

Erzeugung einer Frequenzraumdarstellung (1)

Diskrete 2D Fourier-Transformation

Die zweidimensionale diskrete Fourier-Transformation (FT) eines Bildes $G(y,x)$ ist definiert als:

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} G(y, x) e^{-i\frac{2\pi u}{N}y} e^{-i\frac{2\pi v}{N}x}$$

Die Fourier-Transformation ist invertierbar (umkehrbar).
Das Originalbild kann durch Rücktransformation in den Ortsraum wieder hergestellt werden.

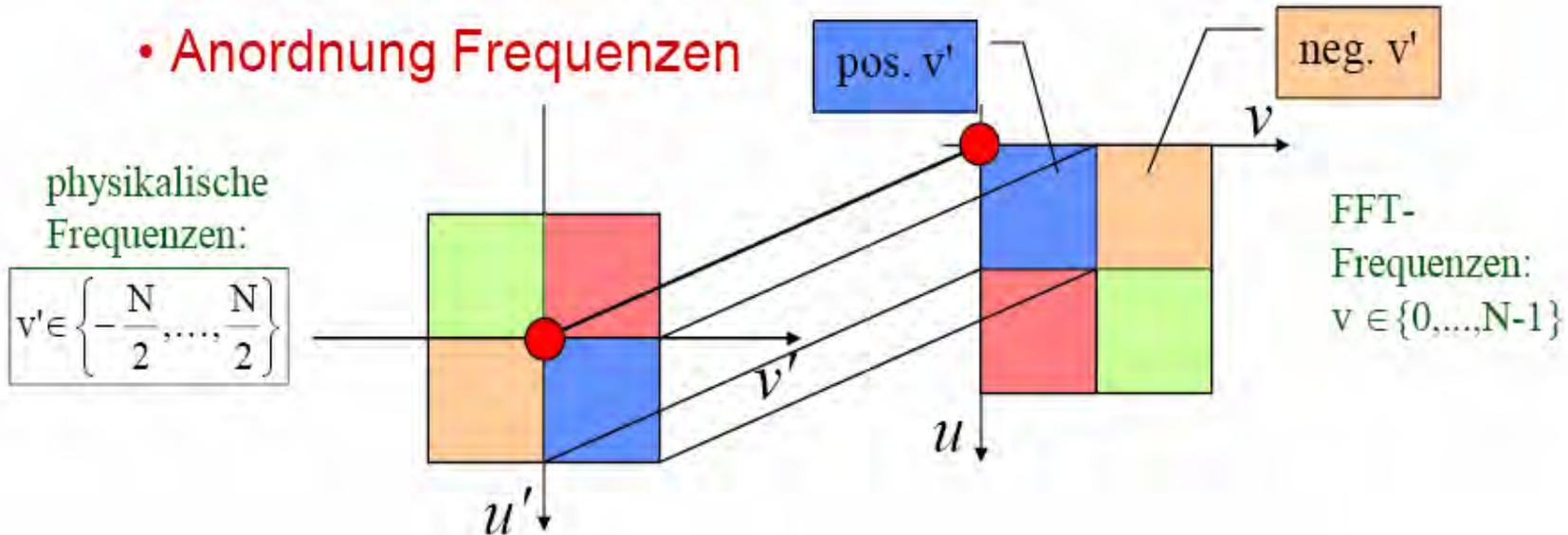
u ist die **Wellenzahl** in y -Richtung und v die **Wellenzahl** in x -Richtung (Wieviel volle Wellen passen in Signal hinein?)

Eigenschaften der diskreten 2D-FT (1)

- Es gilt $F(-u, -v) = F(N - u, N - v)$ (nachrechnen, Periodizität)
- Inverse FT

$$G(y, x) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{+i\frac{2\pi y}{N}u} e^{+i\frac{2\pi x}{N}v}$$

• Anordnung Frequenzen



Eigenschaften der diskreten 2D-FT (2)

- in $F(0,0)$ steht Fourierkoeff. zu 0-Frequenz ("Gleichstromanteil", DC)
- in Spalte $v=10$ stehen Fourierkoeffizienten, deren Wellenlängen in x-Richtung genau 10x ins Bild passen (**Wellenzahl**)
- oberhalb von $v=N/2$ beginnen die negativen Frequenzen
- Übergang zu physikalischen Frequenzen durch "Wrap-around-Shift" um $(u_0, v_0) = (N/2, N/2)$ (**fftshift** in MATLAB, "**Origin at image center**" in ImageJ's Plugin FFTJ)

Erzeugung einer Frequenzraumdarstellung

Fourierspektrum (Spektrum der Ortsfrequenzen)

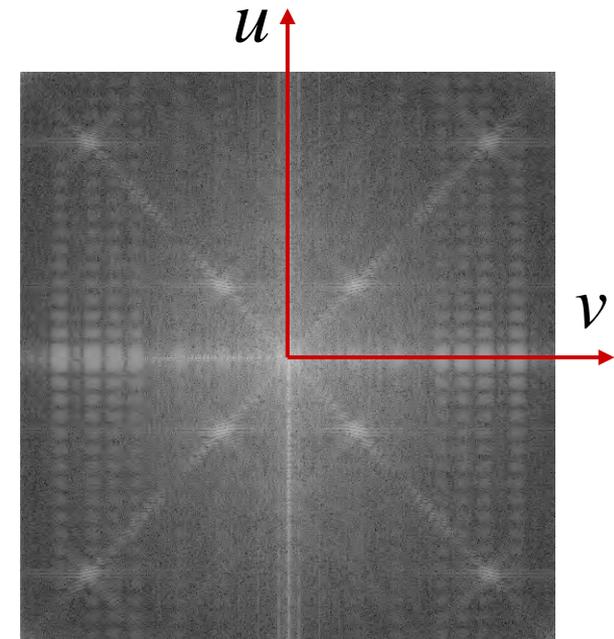
Den Betrag der komplexen Fourier-Transformierten bezeichnet man als Frequenzspektrum (kurz "Spektrum"):

Leistungsspektrum (power spectrum):

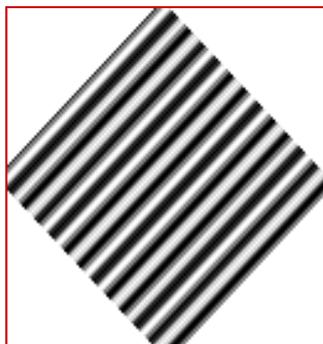
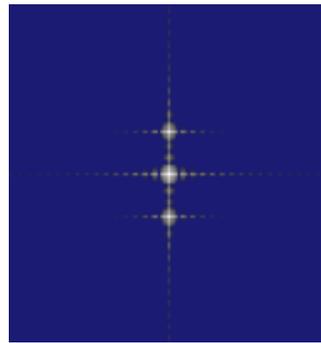
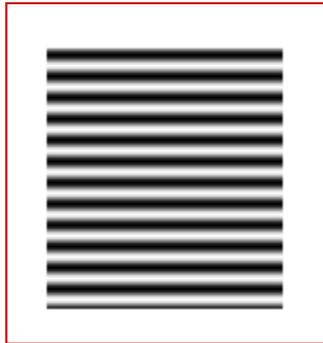
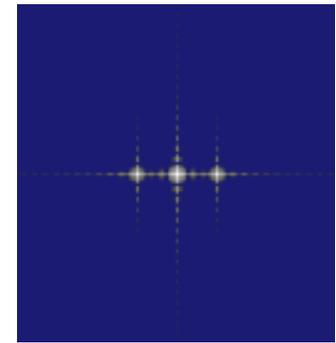
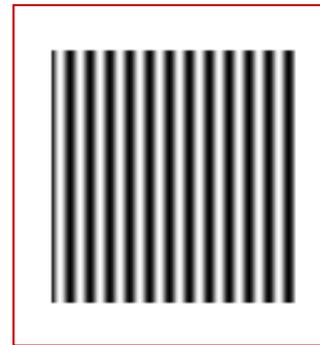
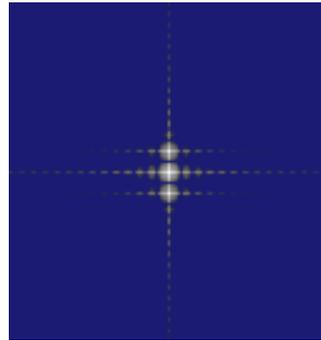
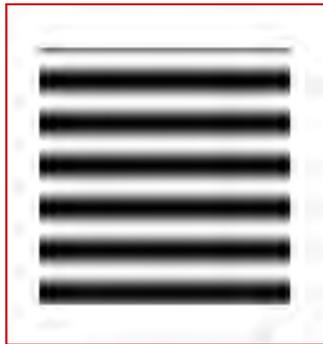
$$P(u, v) = [R(u, v)]^2 + [I(u, v)]^2$$
$$|F(u, v)| = \sqrt{[R(u, v)]^2 + [I(u, v)]^2}$$



512 × 512



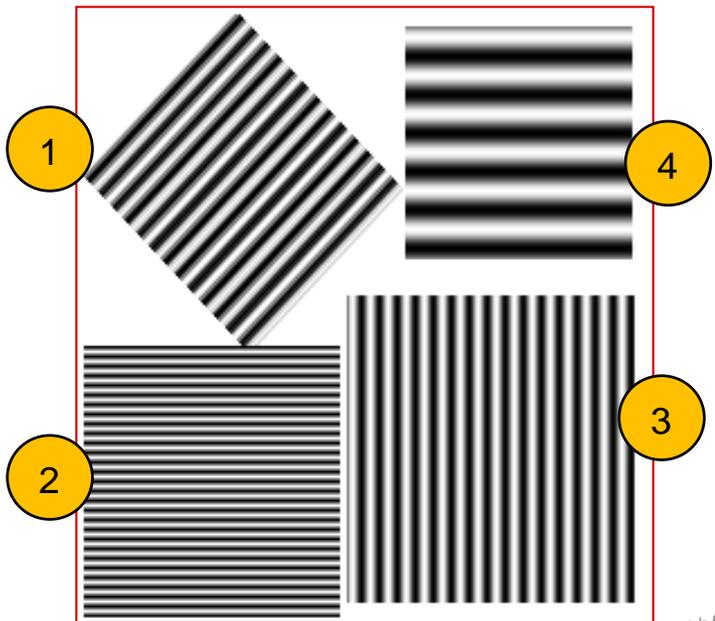
Verschiedene Sinusgitter und ihre Frequenzbilddarstellung



- Der Betrag der Fourier-Transformierten kann als ein "Frequenz-Bild" dargestellt werden.
- Das Frequenzbild ist punktsymmetrisch bzgl. seines Ursprungs, des Null-Frequenz-Punkts ("DC"-Komponente).
- Horizontale (vertikale) Frequenzen im Ortsraum werden im Frequenzbild entlang der horizontalen (vertikalen) Achse aufgetragen.

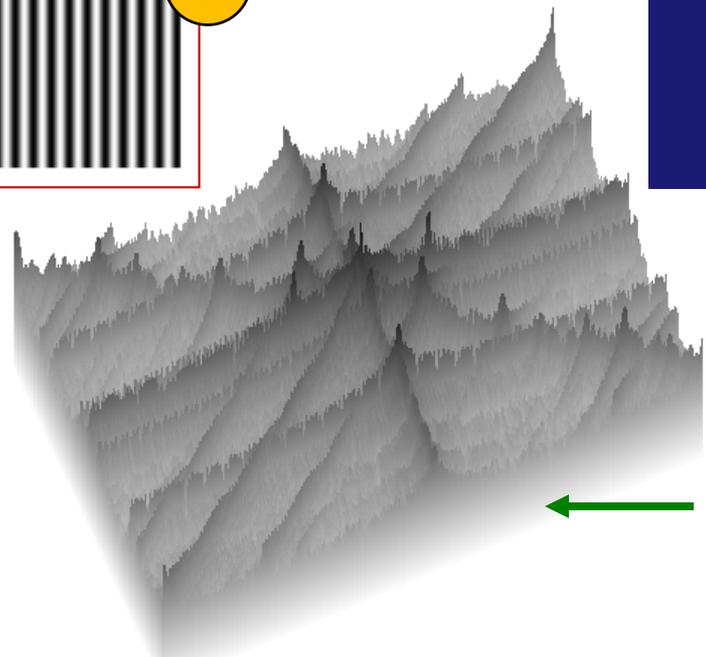
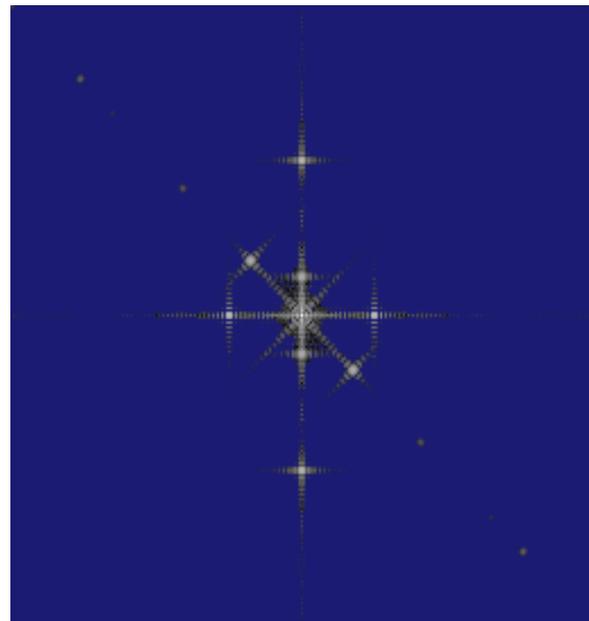
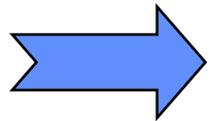
Aktivierung

Frequenzbilddarstellung eines Bildes aus unterschiedlichen lokalen Sinusmustern



Originalbild

Fourier-Transformation und anschließende Betragsbildung



Betrag der Fourier-Transformierten

Ordnen Sie den Bildelementen die Peaks in der FFT zu!

jetzt Übung FFT /
Sinus Gratings,
Teil A

Inhalt

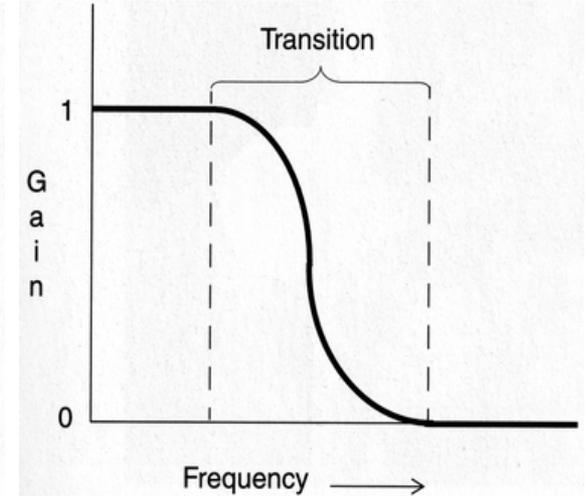
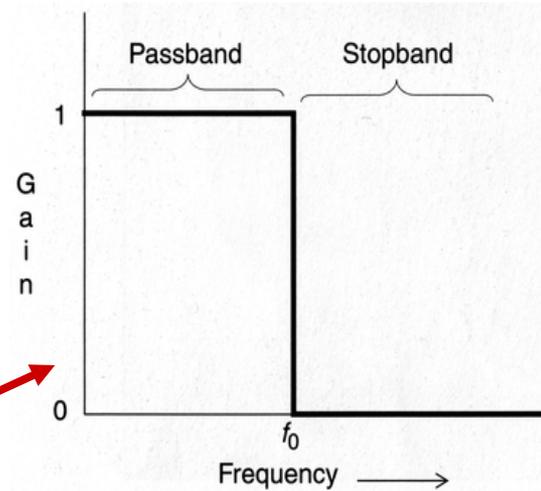
- Filter im Ortsraum: Die Faltung
- Tiefpass-Filter
- Filter im Frequenzraum: Fouriertransformation
 - 1D-Fouriertransformation
 - 2D-Fouriertransformation
- **Anwendungen der Fouriertransformation (kurz)**
 - **Bandstop**
 - **Unsharp Masking**

Lineare Filter (1)

□ Tiefpass

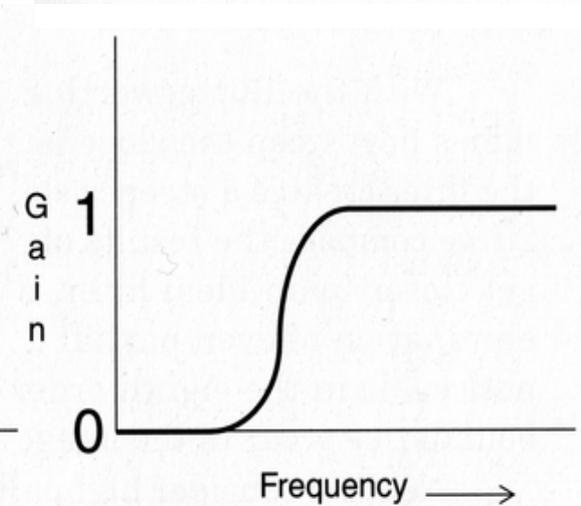
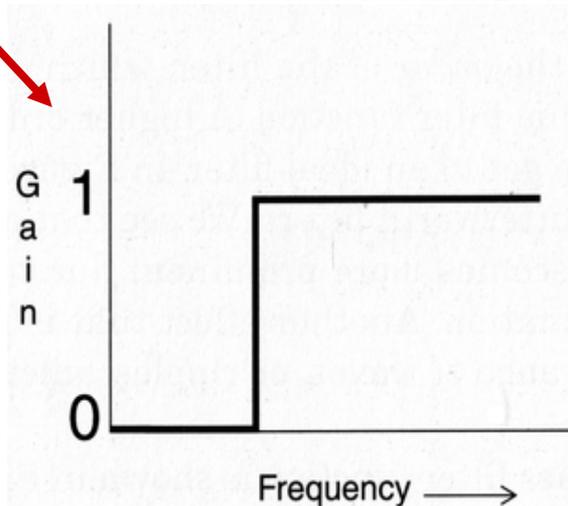
- Unterdrückung hoher Frequenzen (feiner Details)

Ideale und nicht-ideale 1D-Filterfunktion im Frequenzbereich



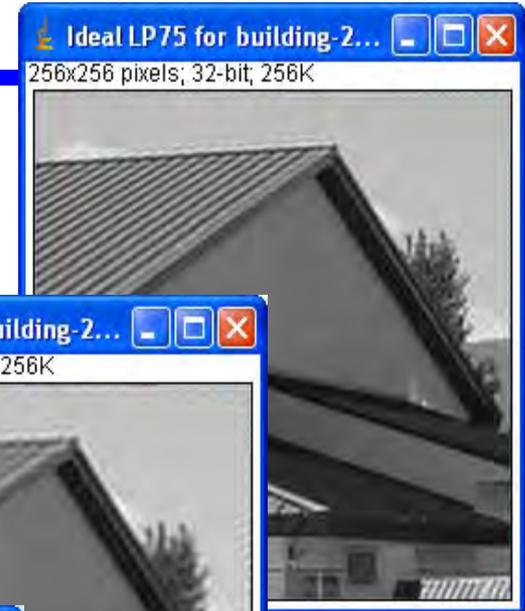
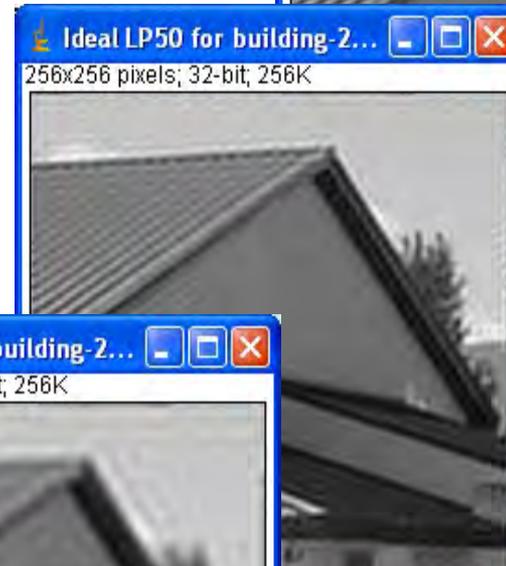
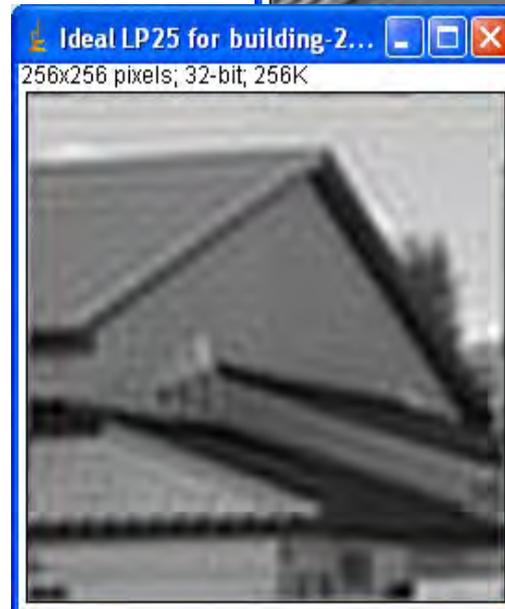
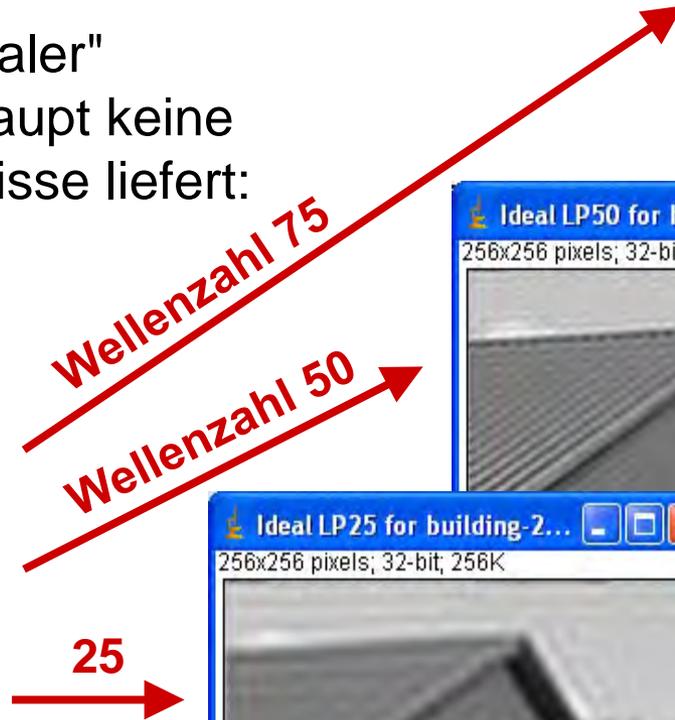
□ Hochpass

- Unterdrückung niedriger Frequenzen (grober Strukturen)



Lineare Filter (2): Ringing-Artefakte

- Warum ein "idealer" Tiefpass überhaupt keine idealen Ergebnisse liefert:



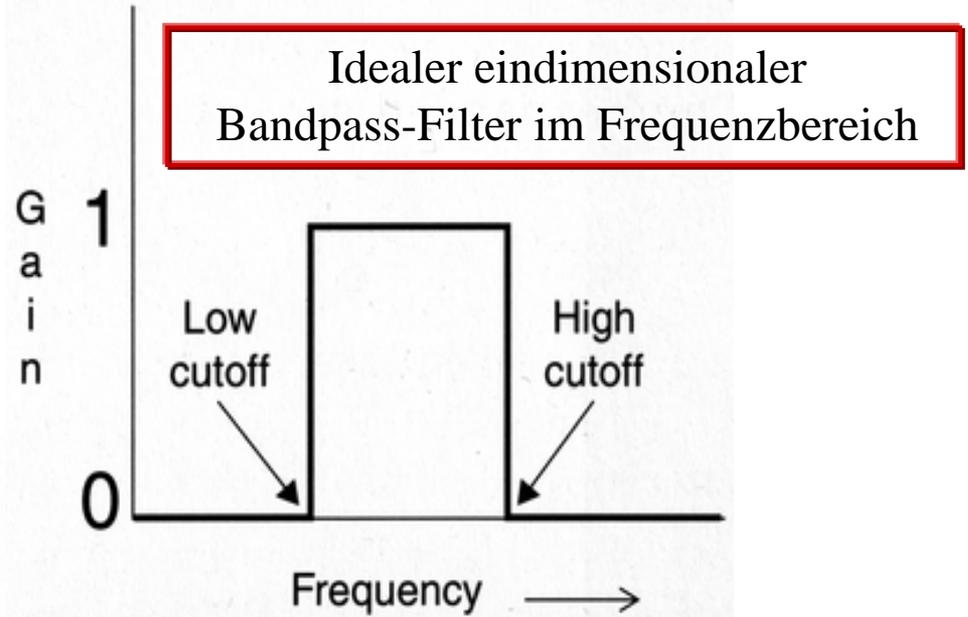
"Ringing": eine scharfe Kante umgibt sich mit (mehreren) Ringen

[ImageJ\plugins\FFTJ\deal_LP_FFTJ.java](#)

Lineare Filter (3)

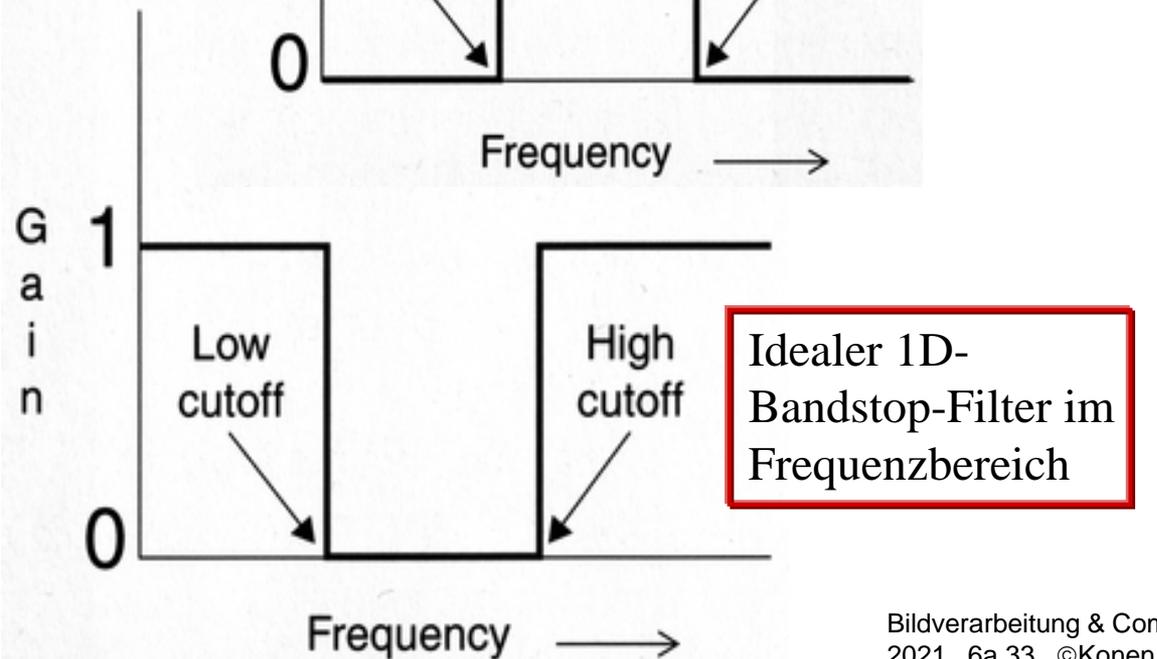
□ Bandpass

- Unterdrückung von hohen und niedrigen Frequenzen



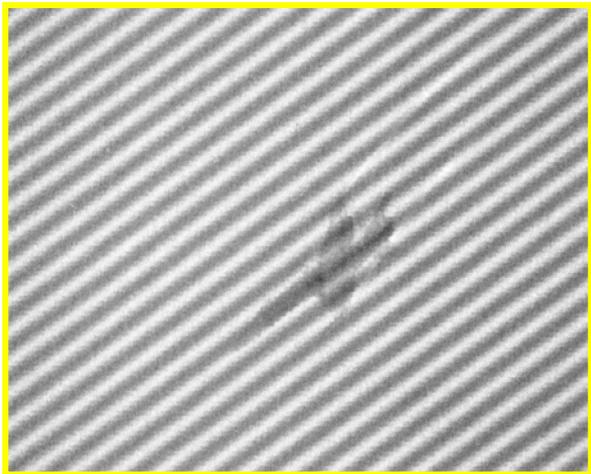
□ Bandstop

- Unterdrückung von Mittenfrequenzen



Anwendung eines Bandstop-Filters

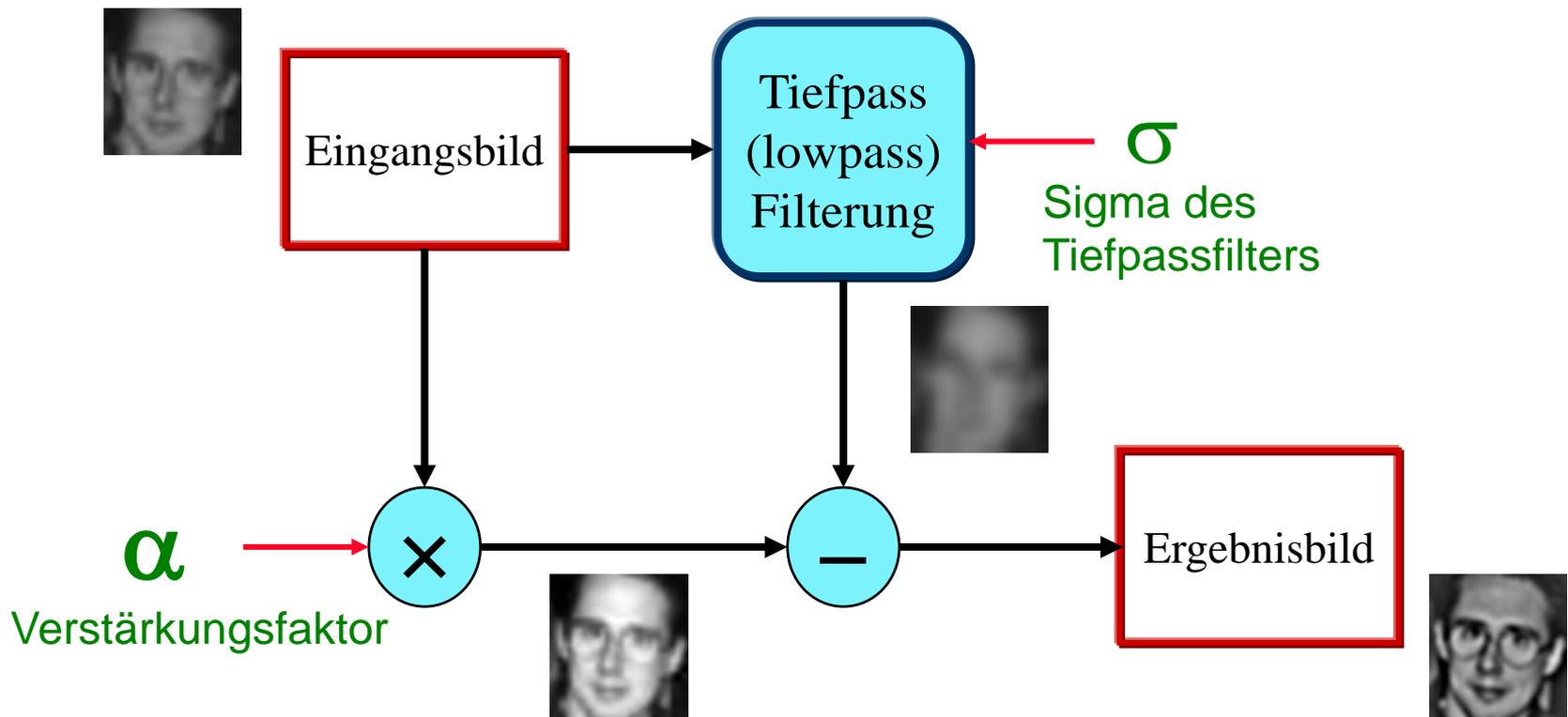
Beispiel: Bildrestauration



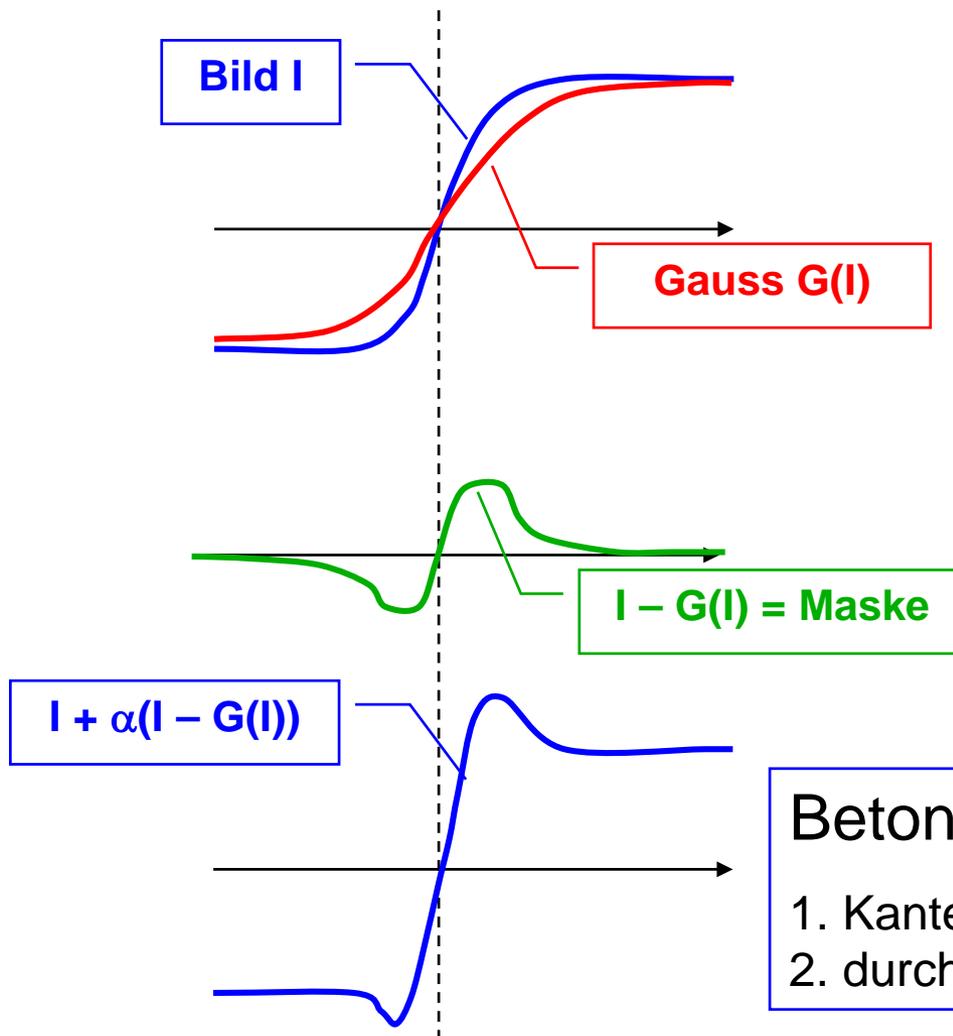
**Unterdrückung der
Störfrequenz**

Anwendung des Tiefpassfilters für das Schärfen (sharpening) eines Bildes

"Unsharp Masking" - Verfahren



Unsharp-Masking Verfahren



Betonung der Kanten:

1. Kanten werden steiler
2. durch Überschwinger stärkerer Kontrast

Unschärfe Maske (Unsharp Masking)

Bildbeispiele

